TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL E FORMULAÇÃO VARIACIONAL DE PROBLEMAS DE VALOR DE CONTORNO UNIDIMENSIONAIS.

Leonardo Andrade de Matos (PIBIC/FA), Leonardo Pires (Orientador), e-mail: lpires@uepg.br .

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise.

Palavras-Chave: *Espaço de Sobolev, Problema de Valor de Contorno, Teorema de Lax – Milgram, Problema de Valor de Contorno de Dirichlet Homogênea.*

Resumo

Este trabalho, consiste no estudo da Abordagem Variacional da Teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDP's) aplicada no contexto dos problemas de valores de contorno unidimensionais. A fim de apresentar a abordagem variacional, foi selecionada a condição de contorno de Dirichlet Homogênea.

Introdução

A Análise Funcional, consolidada no século XX, investiga espaços funcionais e operadores lineares, tendo nos Espaços de Sobolev e no Método Variacional ferramentas centrais para problemas de contorno (BREZIS, 2011). Para um primeiro contato, é conveniente estudar casos unidimensionais, que servem de base para generalizações. Neste trabalho, adota-se a condição de Dirichlet homogênea, por integrar conceitos da área e favorecer a compreensão da formulação variacional.

Materiais e Métodos

Seja $I \subset \mathbb{R}$, um aberto. Os principais espaços funcionais estudados nesta pesquisa são: o Espaço $L^p(I)$ e Espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$, onde segundo Evans (2010) e Brezis (2011):

$$L^p(I) = \{u: I \to \mathbb{R}; u \text{ é } Lebesgue\ mensurável, \int_I |u|^p \leq \infty\}$$

e

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); g \in L^p(I), \int_I g\varphi = \int_I u\varphi' \ \forall \varphi \in C_C^1(I)\}$$

A Condição de contorno de Dirichlet Homogênea, é:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Onde $f \in L^p(I)$ e o *PVC* (1), é valido para todo $U = (a, b)$.

Resultados e Discussão

Aplicando o método variacional em (1), temos que:

Formulação Fraca – Multiplicando (1) por $v \in H_0^1(I)$ e integrando por partes, obtemos:

$$\int_U u'v' + \int_U uv = \int_U fv \ \forall v \in H_0^1(U) = W_0^{1,2}(U) \ (2)$$

A solução de (2) é chamada de *solução fraca* de (1).

Existência e unicidade – Usando o teorema de Lax - Milgram, verifica-se que existe uma única solução fraca de (2).

Regularidade – Isolando o termo $\int_U u'v'$ de (2), concluímos que $u' \in W^{1,2}(U) = H^1(U)$, assim, $u \in H^2(U)$.

Recuperação da solução clássica – Verificamos que se existir uma solução de (2), ela coincidirá com a solução de (1) em quase todo lugar de U. Caso (1) possua solução clássica, então a solução fraca coincidirá com ela, em todo U.

Conclusão ou Conclusões

Como conclusão, destacamos que o Teorema de Lax-Milgram foi fundamental para assegurar a existência e unicidade da solução fraca, a qual, em diversos casos, coincide com a solução clássica da equação diferencial original.

Agradecimentos

Agradeço a Fundação Araucária por financiar este estudo, bem como o professor Doutor Leonardo Pires pela orientação, e por fim, sou grato ao EAIC pela oportunidade de apresentar este trabalho.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer-New York, 2011.

EVANS, L. **Partial differential equations**. Second edition. American mathematical society, 2010.