EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARABÓLICAS

Elton Mateus Neves (PIBIC/CNPq/FA/UEPG), Leonardo Pires (Orientador), e-mail: 00leopires@gmail.com.
Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise.

Palavras-Chave: *equações diferenciais parciais, equação do calor, separação de variáveis.*

Resumo

Nesta apresentação abordaremos como é obtida a fórmula geral para a solução de um problema de valor de contorno de uma equação do calor unidimensional a partir da condição de Dirichlet, utilizando o método de separação de variáveis.

Introdução

Vários fenômenos físicos podem ser modelados a partir de equações diferenciais, em particular, parciais. Isto ocorre porque grandezas físicas são descritas por fórmulas onde elas dependem de alguma grandeza fundamental independente, o que é, na prática, uma função. Equações diferenciais dependem de funções de grandeza que podemos medir para obter como resultado alguma outra. Neste resumo, será abordado a solução de fenômenos físicos que satisfaçam a equação do calor unidimensional.

Materiais e Métodos

A equação do calor é descrita pela fórmula $u_t(x,t)=ku_{xx}(x,t)$, onde u(x,t) é a função da grandeza que queremos obter, t é o tempo, x é a única dimensão que se difunde e k é uma constante positiva.

No caso, consideramos que a dimensão x é finita. Por isso, a condição de fronteira nas pontas do objeto que analisamos o fenômeno físico. No caso, a condição de Dirichlet é de que, nas pontas, a função anula, ou seja, se $x\in[0,l]$, $u(0,t)=u(l,t)=0$.

O método utilizado para solução é a separação de variáveis. Nele, utilizamos uma solução separada, ou seja, em que a solução é o produto de duas funções que dependem apenas de x e t, respectivamente, como, por exemplo u(x,t)=X(x)T(t). Depois descrevemos a solução geral como uma combinação linear de soluções separadas. Após substituir na equação do calor, percebe-se que temos uma igualdade de funções que dependem de variáveis diferentes, ou seja, são constantes. Assim, podemos resolver como duas equações diferenciais ordinárias, uma em relação a x e outra a t. Como o diferencial é um operador funcional, é feita também uma análise para quais valores a constante é autovalor, ou seja, que a operação faz sentido.

Resultados e Discussão

Após substituir a solução separada, obtemos X''/X=T'/kT=λ, sendo X e T derivados pelas suas respectivas variáveis. Como a EDO em relação a t é de primeira ordem, a solução não depende de análise de autovalor, nos dando T=Ae^(λkt). Já a EDO em relação a x é de segunda ordem e, utilizando a condição de Dirichlet, chega-se a conclusão que λ<0, pois essa solução ($X=C\cos(\beta x)+D\operatorname{sen}(\beta x)$, $-\beta^2=\lambda$) admite a condição para funções não nulas. C zera porque X(0)=0, mas D permanece, logo o seno deve ser zerado para que X(l)=0. Assim, β=nπ/l, assim, λ=-sqrt(nπ/l), sendo $n\in\mathbf{N}$. Assim, podemos considerar a solução como a soma para cada n.

Conclusão ou Conclusões

Chegamos a conclusão que a solução geral é $u(x,t)=\Sigma_{n=0}^{\infty}A_n e^{(\sqrt{n\pi/l}kt)}\operatorname{sen}(xn\pi/l)$.

Agradecimentos

O autor agradece à Fundação Araucária pelo apoio fornecido ao longo deste trabalho.

BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Nova Iorque: Springer, 2011.
STRAUSS, W. A. **Partial Differential Equations: An Introduction**. 2 ed. Nova Jersey: Willey, 2008.