EQUAÇÃO DE DIFUSÃO E APLICAÇÕES

Manuela Bertelli Dimbarre (PIBIC/CNPq), Ervin Kaminski Lenzi (Orientador), e-mail: eklenzi@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física

1.05.00.00-6 Física, 1.05.01.00-2 Física Geral, 1.05.01.04-5 Física Estatística e Termodinâmica

Palavras-Chave: *equações de difusão, difusão normal, processos estocásticos, equação de Langevin.*

Resumo

Temos por objetivo abordar algumas questões históricas da equação de difusão usual até a difusão anômala, a qual utiliza operadores diferenciais fracionários. Discutimos as principais contribuições para descrição formal da difusão. Utilizamos as transformadas integrais e analisamos as soluções referentes aos casos estudados.

Introdução

Os processos difusivos permeiam várias situações presentes na natureza que vão deste a física à biologia, passando pelas engenharias, química, etc. Um dos precursores, foi Jean Baptiste Joseph Fourier, que se dedicou à um trabalho de grande importância para o desenvolvimento da físico-química, Teoria da Propagação de Calor em Sólidos. Temos as contribuições de Thomas Graham, Adolfo Eugene Fick, Einstein e, posteriormente, Robert Brown (veja, EVANGELISTA e LENZI, 2018) com o movimento Browniano o qual juntamente com a proposta de Langevin. A equação de difusão pode ser obtida com a formulação de Adolfo Eugene Fick que propõem a transferência da substância por meio de um gradiente de concentração, isto é, $\vec{J} = -D\nabla\rho$ que combinada com a equação $\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{J} = 0$, resulta na equação de difusão $\partial_t\rho = D\partial_x^2\rho$. Einstein em conexão aos resultados obtidos por Robert Brown propõem uma formulação baseada em caminhas aleatórias, resultando na equação de difusão. Posteriormente, Langevin propõem um termo estocástico a equação de Newton para explicar este fenômeno. Atualmente, muitos dos fenômenos encontrados na natura mostram um comportamento que para sua descrição necessita extensões da equação de difusão para descrever a difusão anômala. Uma delas é a introdução do cálculo fracionário que implica na equação, por simplicidade, em uma dimensão espacial, $\partial_t^\gamma\rho = D\partial_{|x|}^\mu\rho$ (EVANGELISTA e LENZI, 2018), que emprega derivadas de ordem fracionaria em ambos os operadores diferenciais.

Materiais e Métodos

Utilizamos os procedimentos de resolução de conceitos das equações diferenciais, transformadas de Laplace e Fourier.

Resultados e Discussão

Temos o comportamento da solução da equação fracionária $\partial_t^\gamma\rho = D\partial_{|x|}^\mu\rho$, dada por

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E_\gamma\left(-D|k|^\mu t^\gamma\right)\cos(kx)dk.$$

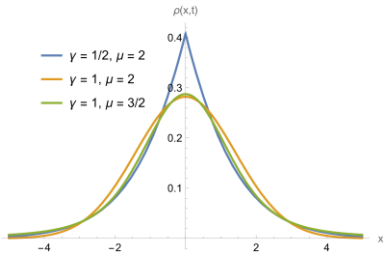


Figura 1. Comportamento da solução da equação fracionária para diferentes valores de γ e μ.

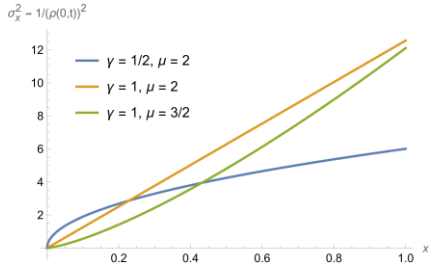


Figura 2. Comportamento de $\sigma_x^2 \sim 1/(\rho(0,t))^2$ obtido da solução da equação fracionária para diferentes valores de γ e μ.

Conclusão

Ao longo deste projeto investigamos como os processos difusivos se comportam em diferentes situações. Começamos com o ponto de vista histórico de forma a compreender a classe de processos que nos conduz a equação de difusão, tipicamente Markovianos e a difusão anômala que tem características não Markovianas. Tais fatos se manifestam com a forma da distribuição e o comportamento não linear com o tempo do deslocamento quadrático médio.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo suporte financeiro.

Referências:

EVANGELISTA, Luiz R.; LENZI, Ervin K. ***Fractional diffusion equations and anomalous diffusion***. Cambridge University Press, 2018.