NÚMEROS E POLINÔMIOS DE BERNOULLI: MÚLTIPLAS CONEXÕES E APLICAÇÕES

Ana Caroline da Silva (PIBIC/FA), Marcos Calçada (Coautor)[1], Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra - Matemática.

Palavras-Chave: *Números de Bernoulli, Polinômios de Bernoulli, Função Zeta, Função Gama, Função Teta.*

Resumo

Este projeto teve como objetivo fazer um estudo dos números e polinômios de Bernoulli, explorar suas múltiplas conexões com as conhecidas funções Zeta, Gama e Teta, bem como fazer importantes aplicações na Teoria dos Números.

Introdução

Os números e polinômios de Bernoulli formam uma vasta rede de conexões matemáticas que ainda desperta grande interesse na matemática moderna. Neste resumo, exploramos as definições e as caracterizações dos números e polinômios de Bernoulli, bem como as suas múltiplas conexões e aplicações. Por fim, destacaremos sua importância em áreas como análise e teoria dos números.

Materiais e Métodos

Realizamos o projeto por meio da revisão da literatura existente sobre os números e polinômios de Bernoulli, além de conduzir seminários informais para exposição e discussão dos resultados. Nosso principal objetivo foi a compreensão dos teoremas, demonstrações e explorar suas múltiplas conexões e aplicações.

Resultados e Discussão

Os números e polinômios de Bernoulli, denotados, respectivamente, por B_m e $B_m(x)$, com $m \geq 0$, são definidos por funções geradoras e por séries de potências:

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{m=0}^{\infty} x^m \frac{B_m}{m!} \quad e \quad \frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x)t^m}{m!}.$$

Além disso, esses números podem ser determinados por meio de uma relação de recorrência. É importante destacar que, para naturais ímpares m maiores do que 1, temos $B_m = 0$. Esses polinômios destacam-se por serem os únicos que satisfazem algumas propriedades e por sua conexão com os números de Bernoulli dado por $B_m = B_m(0)$. Os polinômios de Bernoulli $B_1(x)$ e $B_m(x)$, para m ímpar, podem ser escritos como uma série de Fourier em senos, enquanto $B_m(x)$, para m par, possui a série de Fourier em cossenos. Os números de Bernoulli estão presentes em diversas expansões de Taylor de funções trigonométricas. Por exemplo, eles aparecem nas expansões das funções $x \coth x$ e $z \cot z$. Além disso, os números de Bernoulli estão presentes na função Zeta de Riemann para valores m par, com $m \geq 2$, bem como possuem uma relação com a função Gama. Utilizando a Fórmula de Euler-Maclaurin, obtivemos uma expressão para a constante de Euler-Mascheroni γ em termos dos números de Bernoulli, encontramos uma aproximação para o fatorial de n, para n grande, e provamos a lei de simetria da função Teta de Jacobi. Os resultados apresentados corroboram a importância dos números e polinômio de Bernoulli na soma de potências de inteiros consecutivos, na expansão de séries de Taylor de funções trigonométricas e hiperbólicas, na avaliação de alguns valores da função Zeta de Riemann, na expansão de Euler-Maclaurin, na aproximação de fatoriais, na função Teta e na função Gama.

Conclusão ou Conclusões

Os números e polinômios de Bernoulli formam sequências em Qe $Q[x]$, respectivamente. Suas aplicabilidades se estendem desde expansões de séries até conexões profundas com a Teoria dos Números. Portanto, os números e polinômios de Bernoulli são essenciais em diversas aplicações teóricas e práticas, justificando seu estudo contínuo.

Agradecimentos

Agradecemos o financiamento realizado pela Fundação Araucária, sem ela tal projeto não seria realizado.

APOSTOL, T. M. An elementary view of Euler's summation formula. **The American Mathematical Monthly**, v. 106, n. 5, p. 409–418, 1999

BROCKVELD, P. **Os números e Bernoulli como um exemplo de relação entre o discreto e o contínuo**. 2021. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UFSC, Florianópolis (SC), 2021.

LARSON, N. D. **The Bernoulli number: a brief primer**. Monografia, Whitman College, 2019.

MIRKOSKI, M. L. **Os números e polinômios de Bernoulli**. 2018. Dissertação (Mestrado PROFMAT), UEPG, Ponta Grossa (PR), 2018.

[1]Coorientador.

ISSN 1676-0093