XXXII Encontro Anual de Iniciação Científica
IX Encontro Anual de Iniciação Científica Jr.
EAIC 2023

ASPECTOS DAS EQUAÇÕES DE DIFUSÃO E DIFUSÃO ANÔMALA

Murilo Serman Prestes (PIBIC/CNPq/FA/UEPG), Ervin Kaminski Lenzi (Orientador), e-mail: eklenzi@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física.

1.05.00.00-6 Física, 1.05.01.00-2 Física Geral

Palavras-Chave: *Cálculo Fracionário, Fenômenos de Transporte, Processos Difusivos*

Resumo

O estudo desenvolvido concerne às equações de difusão, desde a equação de difusão usual até a equação de difusão anômala que emprega em seus aspectos operadores diferenciais de ordem fracionária que ajudam a descrever esses processos difusivos anômalos.

Introdução

O processo difusivo é caracterizado como um fenômeno de transporte de matéria ou condução de energia em sistemas que não estão equilibrados. A maior parte dos processos difusivos obedecem à lei de Fick, dada por: $\vec{J} = -D\nabla\rho$ (CRANK, 1979), onde $\vec{J}$ é a densidade de corrente medida, D o coeficiente de difusão e é constante, ρ é a densidade da substância. A partir da combinação da lei de Fick e a equação de continuidade, temos, enfim, a equação de difusão: $\partial_t\rho = D\partial_x^2\rho$. A necessidade do cálculo fracionário surge quando este oferece um bom modelo para descrever a difusão anômala onde a distribuição de partículas é dada por uma função não-linear em relação ao tempo. O cálculo fracionário generaliza o cálculo diferencial e integral para funções com ordens fracionárias e define-se por meio de operadores integrais como os de Riemann-Liouville e Caputo. Em termos destes operadores uma generalização da equação de difusão para abordar situações que não são descritas de forma adequada com a equação de difusão usual é (EVANGELISTA e LENZI, 2018):

$$\int_0^2 d\bar{\gamma}\, p_\gamma(\bar{\gamma})\frac{\partial^{\bar{\gamma}}}{\partial t^{\bar{\gamma}}}\rho(x,t) = D_{\gamma,\mu}\int_1^2 d\bar{\mu}\, p_\mu(\bar{\mu})\frac{\partial^{\bar{\mu}}}{\partial|x|^{\bar{\mu}}}\rho(x,t)\,. \quad (1)$$

Materiais e Métodos

Os materiais que empregamos ao longo do desenvolvimento do projeto de iniciação científica, dizem respeito ao desenvolvimento em física do ponto de vista teórica no tocante. Neste sentido, utilizamos as transformadas de Laplace e de Fourier e a técnica de função de Green para que possamos resolver as equações diferenciais ordinárias e parciais.

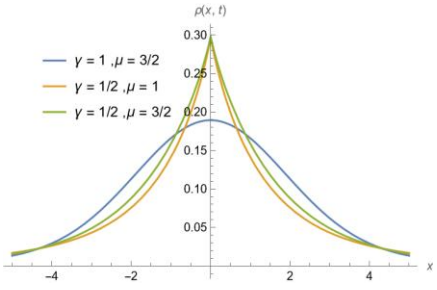
Resultados e Discussão

Passemos agora as soluções de alguns destes casos que estão relacionados com a equação de difusão generalizada da seção anterior que use derivadas de ordem fracionária. Dentre eles temos o caso representado pela equação $\partial_t^\gamma\rho = D_\gamma\partial_x^2\rho$. A solução para este caso é $\rho(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{x}\,\mathcal{G}(x-\bar{x},t)\rho(\bar{x},0)$ com a função de Green dada por: $\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\gamma t^\gamma}}H_{1,1}^{1,0}\left[|x|\Big/\sqrt{K_\gamma t^\gamma}\,\middle|\,{\left(1-\frac{\gamma}{2},\frac{\gamma}{2}\right)\atop(0,1)}\right]$, em termos das funções H de Fox. Agora vamos considerar uma equação de ordem distribuída com relação a derivada fracionária espacial, ou seja, vamos considerar a equação (1) para o caso em que $p_\gamma(\bar{\gamma}) = \delta(\bar{\gamma}-\gamma)$ e $p_\mu(\bar{\mu}) = \delta(\bar{\mu}-2)+\delta(\bar{\mu}-\mu)$. A solução formalmente é escrita do mesmo modo que a anterior com a função de Green dada por

$$\mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\cos(kx)E_\gamma\left(-\left(D_{\gamma,2}k^2 + D_{\gamma,\mu}|k|^\mu\right)t^\gamma\right),$$

dada em termos das funções de Mittag-Leffler (veja gráfico abaixo).

GRÁFICO 1: Comportamento $\rho(x,t)$ de para a condição inicial $\rho(x,0) = \delta(x)$ para diferentes valores dos parâmetros γ e μ.



Fonte: O autor

Conclusão

Ao longo deste projeto analisamos várias equações de difusão que estendem a equação de difusão usual por meio do emprego de derivadas de ordem fracionárias. Tais equações são capazes de incorporar diversos efeitos e obter o comportamento não linear para o segundo momento, muito observado no contexto da difusão anômala.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo suporte financeiro.

CRANK, J. **The mathematics of diffusion**. Oxford university press, 1979.

EVANGELISTA, Luiz Roberto; LENZI, Ervin Kaminski. **Fractional diffusion equations and anomalous diffusion**. Cambridge University Press, 2018.