XXXII Encontro Anual de Iniciação Científica
IX Encontro Anual de Iniciação Científica Jr.
EAIC 2023

ESPAÇOS MÉTRICOS E A PROPRIEDADE DA COMPLETUDE

Hugo Gielamo Próspero (PROVIC), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística

Ciências Exatas e da terra, Matemática, Análise.

Palavras-Chave: *espaços métricos, sequências de Cauchy, completude.*

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo da teoria dos espaços métricos, desde seus principais conceitos, propriedades e resultados, bem como de diversos exemplos, em diferentes contextos. Destacamos a propriedade da completude e de alguns teoremas, nos quais ela é de fundamental importância como, por exemplo, o teorema do ponto fixo de Banach e o teorema de Baire. Finalizamos com uma aplicação da propriedade da completude de um particular espaço métrico de funções para a construção da chamada *space-filling curve* de Peano.

Introdução

A noção de distância entre dois pontos da reta real, que é dada via o módulo da diferença entre os números reais que os representam, é de fundamental importância para definir os conceitos de vizinhança de um ponto, convergência de sequências, limite, continuidade, etc [1]. Os Espaços Métricos generalizam essa noção de distância sem a necessidade de conhecer a natureza dos elementos de um conjunto. Sendo assim, o conhecimento da teoria dos espaços métricos e, adicionalmente, da propriedade da completude é importante e serve como base para compreender o funcionamento de diversos métodos, técnicas e resultados da Análise como, por exemplo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach [2,3], fundamental para se demonstrar a existência e unicidade da solução de problemas de valor inicial em equações diferenciais ordinárias.

Materiais e Métodos

Foram utilizados livros e artigos para pesquisa e revisão da literatura sobre o tema e seminários para exposição e discussão dos resultados.

Resultados e Discussão

Dentre as caracterizações da completude de um espaço métrico, além da mais conhecida via critério de Cauchy [1,3], obteve-se mais cinco equivalências [6]: o Critério do ponto virtual, Critério Universal, Critério da Família Encaixada, o Critério da Sequência Encaixada; e uma mais recente, Critério do *d-point* [7]. Além disso, aplicou-se algumas dessas caracterizações para demonstrar teoremas, que precisam da completude para serem validados, como o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que garante a existência de um único ponto fixo em contrações sobre um Espaço Métrico Completo [2]; o Teorema de Baire, que afirma que todo conjunto magro em um espaço métrico completo tem interior vazio [5]; e construiu-se a "*Peano space-filling curve*" [4], que é obtida a partir da completude do espaço métrico C das funções contínuas com a métrica uniforme, ou seja, construiu-se uma aplicação contínua $f: I \to I^2$ sobrejetora, em que $I = [0,1]$.

Conclusão ou Conclusões

Neste trabalho apresentamos diferentes caracterizações da propriedade da completude de espaços métricos, de fundamental importância para a validade dos teoremas do Ponto Fixo de Banach, de Baire e para obtenção da curva de Peano. Esses teoremas possuem muitas aplicações e aí reside a importância da propriedade da completude.

Agradecimentos

Agradecemos ao Programa Voluntário de Iniciação Científica (PROVIC) pela oportunidade da pesquisa e desenvolvimento deste trabalho.

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços Métricos e Introdução à Topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[2] DUARTE, I. S. **Espaços Métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach**. Campina Grande, PB, 2014

[3] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. Toronto: John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[4] MUNKRES, J. R. **Topology**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[5] SCHNEIDER, R. A. C.;SILVA, V. C. **O Teorema de Baire e uma Aplicação no Espaço de Funções**. Rio de Janeiro: Cadernos do IME, 2021.

[6] SEARCÓID, M. Ó. **Metric Spaces**. London: Springer-Verlag, 2007.

[7] WESTON, J. D. **A Characterization of Metric Completeness**. Proceedings of the AMS, v. 64, p.186-188, 1977.