XXXII Encontro Anual de Iniciação Científica
IX Encontro Anual de Iniciação Científica Jr.
EAIC 2023

Operadores de Diferença de Ordem Não Inteira: Implementação Numérica e Aplicações à Resolução Numérica de Equações Diferenciais Parciais de Ordem Não Inteira

Gabriel Pinto Andrade (PIBIC/CNPq), Jocemar de Quadros Chagas (Orientador), e-mail: jocemarchagas@uepg.br.

UEPG/DEMAT.

Área e subárea do conhecimento: Matemática e Análise.

Palavras-Chave: *Equação do calor, Equação de Difusão Fracionária, Método de Diferenças Finitas.*

Resumo

Neste trabalho apresentamos a implementação numérica do método de diferenças finitas aplicada à equação de difusão fracionária unidimensional, com $1 < \alpha \leq 2$. Quando $\alpha = 2$, recupera-se a equação de difusão clássica. Quanto mais o parâmetro α é tomado próximo de 1, mais a solução apresenta características de transporte e menor é a difusão observada

Introdução

Neste trabalho apresentamos a implementação numérica do método de diferenças finitas aplicado à equação do calor unidimensional com condições de fronteira de Dirichlet nulas [1], e à equação de difusão fracionária, com o operador fracionário de ordem $1 < \alpha \leq 2$, e com condições de fronteira de Dirichlet nulas [2].

Utilizamos a equação de difusão fracionária unidimensional, que quando fazemos $\alpha = 2$ temos a equação de difusão do calor, como apresentado a seguir:

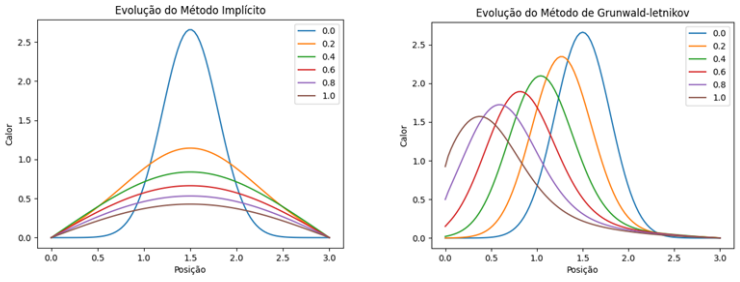
$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(x,t) = a \cdot \frac{d^{\alpha}u}{dx^{\alpha}}, & a > 0,\ 0 \leq x \leq L,\ 0 < t < T, 1 < \alpha \leq 2 \\ u(x,0) = \Psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u(0,t) = f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ u(L,t) = g(t), & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

Materiais e Métodos

Discretização via método de diferenças finitas. Implementação computacional da discretização utilizando Python 3.10. Todos os resultados foram obtidos usando um computador com um processador Intel Core i3-10300H, 16GB de RAM e com placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 1660 Ti com 6GB de memória.

Resultados e Discussão

Para a equação de difusão com $\alpha \neq 2$, utilizamos a discretização por meio do método de Grunwald-Letnikov deslocado com $p = 1$, e para $\alpha = 2$ apresentamos os resultados do método de discretização implícito. Os resultados das evoluções do sistema estão apresentados a seguir. A equação fracionária foi simulada com $\alpha = 1{,}1$.



(a) (b)

Figura 1. (a) Gráfico da solução da Equação do Calor utilizando método implícito (b) Gráfico da solução da Equação de Difusão Fracionária pelo Método de Grunwald-Letnikov

Conclusão ou Conclusões

Durante a pesquisa foi concluído que apesar de existirem diferentes métodos de discretização por diferenças finitas para a equação de difusão do calor, para condições de fronteira de Dirichlet eles apresentam resultados muito parecidos, com o método implícito e de Crank-Nicolson sendo mais vantajosos pois são incondicionalmente estáveis.

Os resultados para a equação de difusão fracionária demonstraram uma mesclagem entre a difusão e o transporte sendo que o α escolhido funciona como um "peso" para a equação. Utilizando α mais perto de 2 notamos que o resultado fica cada vez mais semelhante com a equação de difusão do calor, e quanto mais perto de 1 se torna mais semelhante a equação de transporte.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pela concessão de bolsa de iniciação científica na modalidade PIBIC.

[1] CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de Equações Diferencias Parciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] MEERSCHAERT, M. M.; TADJERAN, C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 172, p. 65-77, 2004.