XXX Encontro Anual de Iniciação Científica
VII Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
eaic 2021

TEOREMAS DO VALOR MÉDIO E INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES FUNCIONAIS

Rodrigo Santiago Biasio (PIBIC/UEPG), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

Palavras-Chave: *Equações funcionais, Teorema do Valor Médio Generalizado, Equação de Cauchy, Lagrange, Pompeiu.*

Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo detalhado sobre resultados relacionados ao Teorema do Valor Médio, suas generalizações e também um estudo introdutório das Equações Funcionais. Enunciamos e demonstramos os Teoremas do Valor Médio, suas consequências e aplicações. Enunciamos e resolvemos algumas Equações Funcionais, obtendo generalizações interessantes e aplicações. Neste estudo usamos técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, elementos de Análise Real e técnicas de EDO's.

Introdução

O Teorema do Valor Médio (TVM) de Lagrange é um dos conceitos mais importantes vistos em Cálculo, com consequências bem importantes para essa teoria. A partir desse teorema muitas outras versões e até mesmo generalizações do mesmo surgiram com o passar o tempo, originando novos significados e interpretações curiosas. Como, por exemplo, o TVM de Pompeiu, que se originou a partir do TVM de Lagrange e apresenta algumas particularidades bastante interessantes. As Equações Funcionais (EF's) são um tema bem atual de pesquisa e, de certa forma, estão relacionadas aos TVM's. Além de caracterizarem funções, podem nos colocar em contato com problemas em aberto com, relativamente, pouco tempo de estudo e possuem aplicações em diferentes áreas.

Material e Métodos

Foram utilizadas bibliografias sobre os temas e os métodos e técnicas de Cálculo Diferencial e Integral.

Resultados e Discussão

Foram estudadas diferentes versões do Teorema do Valor Médio, entre elas o bem conhecido Teorema do Valor Médio de Lagrange e outras menos conhecidas como, sua generalização, o Teorema do Valor Médio de Cauchy, o Teorema do Valor Médio de Pompeiu e o Teorema do Valor Médio para Integral. Destacamos aqui o de **Pompeiu**, cujo enunciado é: *seja f uma função real diferenciável em um intervalo $[a,b]$ não contendo a origem e para todo $x_1 \neq x_2 \in [a,b]$, existe um ponto η em (x_1,x_2) tal que*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\eta) - \eta f'(\eta)$$

Isso significa que a reta tangente que toca o gráfico da função no ponto $(\eta, f(\eta))$, toca o eixo y no mesmo ponto em que toca a secante conectando os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Interpretação geométrica que consideramos bastante curiosa.

Além disso, fizemos um estudo das equações funcionais, ou seja, determinar funções que satisfazem determinadas igualdades. Dentre elas destacamos as equações Funcionais de **Cauchy** no corpo dos Reais: **Aditiva**: $f(x+y) = f(x) + f(y)$; **Exponencial**: $g(x+y) = g(x)g(y)$, e **Logarítmica**: $h(xy) = h(x) + h(y)$, cujas soluções contínuas são, respectivamente: $f(x) = cx$, $g(x) = e^{cx}$ e $g(x) = 0$, e $h(x) = c\ln|x|$ $(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, em que c é uma constante arbitrária. Além dessas, estudamos as EF's de **Pexider,** $f(x+y) = g(x) + h(y)$, $f(x+y) = g(x)h(y)$ e $f(xy) = g(x) + h(y)$), as quais generalizam as EF's de Cauchy. Já a EF de **Jensen**

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

que surge a partir da definição de função convexa, possui soluções do tipo função afim ($f(x) = cx + a$ onde c, a são constantes arbitrárias). Finalizamos com o estudo da EF de **d'Alembert,** $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$), que foi um dos precursores do estudo das Equações Funcionais e cujas soluções são $f(x) = 0, f(x) = 1, f(x) = \cosh(\alpha x), f(x) = \cos(\beta x)$, em que α, β são constantes arbitrárias, e assim é uma forma de "caracterizar" as funções cosseno. Existe um grande período de tempo entre d'Alembert (1769), que iniciou os estudos das EF's, e seu desenvolvimento e progresso até a solução contínua da EF dada por Cauchy (1821).

Conclusão ou Conclusões

Com este trabalho pudemos perceber a importância do Teorema do Valor Médio, que é um resultado presente no Cálculo e na Análise, onde suas aplicações são diversas. Salientamos também a grande variedade de EF's que existem e que estão propostas como problemas em aberto, suas diferentes técnicas de resolução e a conexão que pode ser feita entre Álgebra e Análise, bem como as inúmeras aplicações.

Agradecimentos

À UEPG, pela estrutura e oportunidade. Ao PIBIC/UEPG, pela bolsa.

1) SAHOO, P. K.; RIEDEL, T. **Mean Value Theorems and Functional Equations**. Singapore: World Scientific, 1998.
2) SAHOO, P. K.; KANNAPPAN, P. **Introduction to Functional Equations**. New York: CRC Press, 2011.
3) CASTILLO, E.; IGLESIAS, A.; COBO, R. R. **Functional Equations in Applied Sciences**. Amsterdam: Elsevier, 2005.