XXX Encontro Anual de Iniciação Científica
VII Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
eaic 2021

GRUPÓIDES EM COMBINATÓRIA

Natã Mainardes Fernandes (PIBIC/FA), Marcos Calçada (Orientador), e-mail: natafernandes7@gmail.com, e-mail do orientador: mcalcada@gmail.com.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática, Matemática Aplicada.

Palavras-Chave: *Combinatória, simetrias, grafos, grupos, grupóides.*

Resumo

De maneira geral, em Matemática e suas aplicações, a ideia de simetria é formalizada pelo conceito de grupo. Porém, pode-se argumentar que o conceito mais geral de grupóide é a noção mais adequada, pois permite tratar de forma unificada as simetrias internas e externas de uma dada configuração ou sistema. O presente trabalho consiste em um estudo sobre a possibilidade de utilização de grupóides em Combinatória. Em especial, estuda-se a ação de grupóides em grafos com o intuito de generalizar alguns resultados conhecidos sobre a ação de grupos.

Introdução

Em Combinatória existe a teoria de enumeração de Polya, que trata do problema de contar configurações de um sistema que possui simetrias. As simetrias são descritas utilizando o conceito de grupos. O objetivo deste trabalho é buscar generalizações de alguns destes resultados utilizando o conceito mais geral de grupóides. Para isso foram feitos vários cálculos com o intuito de fornecer exemplos que embasassem conjecturas sobre a extensão de resultados de grupos para grupóides.

Material e Métodos

A metodologia utilizada foi a típica da pesquisa em Matemática, e consistiu basicamente dos seguintes procedimentos: 1) Estudo e análise crítica dos resultados da literatura. 2) Reprodução de alguns cálculos da literatura e a realização de outros relativos ao problema estudado. 3) Formulação e verificação de conjecturas. 4) Discussão dos resultados obtidos e confecção de um artigo científico.

Resultados e Discussão

Um Grupo é um conjunto G com uma lei de composição $*\colon G \times G \to G$, que satisfaz as seguintes propriedades: (i) Associatividade: $g * (g' * g'') = (g * g') * g''$, para quaisquer $g, g', g'' \in G$. (ii) Existência de Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $e * g = g * e = g$, para todo $g \in G$. (iii) Existência de Elemento inverso: Para todo $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$. Se $g * g' = g' * g$, para todo $g, g' \in G$ o grupo é chamado de abeliano (ou comutativo). A cardinalidade de G é chamada de ordem do grupo e será denotada por $|G|$. Um grupo G atua em um conjunto S quando há um mapa $G \times S \to S$ (escrito $(g, s) \mapsto gs$) tal que para todo $s \in S$ vale as condições. (i) Associatividade: Para quaisquer $g, h \in G$ e $s \in S$, temos $g(hs) = (gh)s$. (ii) Identidade: a ação da identidade de G em cada $s \in S$ dá s, ou seja, $es = s$. Um Grupóide consiste em um conjunto G, um conjunto Ω, e dois mapas $s, t\colon G \to \Omega$, chamados de origem e destino, respectivamente. O conjunto Ω é chamado de espaço de objetos do grupóide cujos elementos serão denotados por x, y, etc. Os elementos em G serão chamados de morfismos ou setas do grupóide e serão denotadas por $\alpha\colon x \to y$, onde x é a origem do morfismo α, logo, $s(\alpha) = x$ e y é o destino, isto é, $t(\alpha) = y$. Dois morfismos $\beta, \alpha \in G$ serão considerados componíveis se $t(\alpha) = s(\beta)$. O conjunto de pares (β, α) de elementos componíveis será denotado por G_2. Os axiomas de um grupóide são completados afirmando que a lei de composição é definida apenas em pares de morfismos componíveis, $\circ\colon G_2 \to G$, tal que: (i) Associatividade: $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$, sempre que (β, α) e (γ, β) estão em G_2. (ii) Unidades: Para qualquer $x \in \Omega$, existe um morfismo $1_x\colon x \to x$, denominado unidade em x, tal que se $\alpha\colon x \to y$, então $\alpha \circ 1_x = \alpha$ e $1_y \circ \alpha = \alpha$. (iii) Inverso: Para qualquer morfismo $\alpha\colon x \to y$, existe outro morfismo $\beta\colon y \to x$, tal que $\beta \circ \alpha = 1_x$ e $\alpha \circ \beta = 1_y$. Esse morfismo será denotado por α^{-1}. Com estes conceitos construímos alguns exemplos de ações de grupos de permutações, utilizando grafos com ciclos e suas respectivas árvores geradoras. Desses exemplos foram obtidas algumas conjecturas, tais como a que afirma que o número de órbitas de uma árvore geradora é sempre 1.

Conclusão ou Conclusões

Neste trabalho conseguimos entender como contar o número de órbitas resultantes de uma ação específica de grupóides em um grafo sem ciclos (árvore) ou com ciclos. Tal ação é importante em Física-Matemática no estudo de Teorias de Gauge Categorificadas Discretas.

Agradecimentos

Agradeço à Fundação Araucária pela bolsa e ao professor Marcos Calçada por toda a dedicação.

RAY, S. S. **Graph Theory with Algorithms and its Applications**. India: Springer, 2013.

IBORT, A.; RODRIGUEZ, M, A. **Na Introduction to Groups, Groupoids and Their Representations.** CRC Press, 2020.

MERRIS, R. **Combinatorics.** 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003.

WEINSTEIN, A. **Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry. A Tour through Some Examples.** 744. Notices of the AMS. Volume 43, número 7. 1996.