XXX Encontro Anual de Iniciação Científica
VII Encontro Anual de Iniciação Científica Júnior
eaic 2021

UM ESTUDO SOBRE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

Mateus Andrade Kuller (PIBIC/CNPq), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa / Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra, Matemática.

Palavras-Chave: *Desigualdades, Médias, Jensen, Minkowiski, Hölder.*

Resumo

Este trabalho teve como objetivo enunciar e demonstrar desigualdades elementares e importantes para a matemática, como por exemplo a desigualdade triangular, entre as médias, de Cauchy-Schwarz, de Jensen entre outras e algumas aplicações das mesmas, além disso, generalizações das médias tais como a média de potência.

Introdução

Na antiguidade eram conhecidas apenas algumas desigualdades, tais como a triangular, a desigualdade entre as medias aritmética e geométrica para dois números, aproximação para o número π, entre outras, mas geralmente com enfoque principalmente geométrico. Com o decorrer do tempo a importância das desigualdades para a matemática só aumentou, passando pela era moderna com grandes avanços, e recentemente podemos destacar a criação de revistas especificas para desigualdades, tais como a *Journal of Inequalities and Applications*, com primeiro volume em 1997 e a revista *Mathematical Inequalities and Applications,* com primeiro volume em 1998.

Material e Métodos

Foi utilizado bibliografia sobre o tema e ferramentas matemáticas para as demonstrações.

Resultados e Discussão

Neste trabalho foram estudadas diversas desigualdades. Contudo, por questões de espaço e gosto, optamos em expor as seguintes.

Desigualdade entre as médias Harmônica, Geométrica e Aritmética: dados $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, com igualdade se, e só se, $a_1 = \cdots = a_n$. Observamos que essas médias são casos especiais da função $M_n^{[r]}(a_1, \dots, a_n) = (\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n})^{\frac{1}{r}}$, para $r \in \mathbb{R}^*$ e $M_n^{[0]}(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{a_1 \dots a_n}$ para $r = 0$. Ademais, por se tratar de uma função crescente é válido o resultado a seguir, conhecido como desigualdade das médias de potência: sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$, $r, s \in \mathbb{R}$ e $r < s$ tem-se que $M_n^{[r]} \leq M_n^{[s]}$. Se definirmos a sequência $\underline{M}^{[r]} = (M_1^{[r]}(a_1), \dots, M_n^{[r]}(a_1, \dots, a_n), \dots)$, podemos enunciar a Desigualdade de Nanjundiah: sejam $r, s \in \mathbb{R}$ e $r < s$, então $M_n^{[r]}(\underline{M}^{[s]}) \leq M_n^{[s]}(\underline{M}^{[r]})$. Em ambas as desigualdades citadas, ocorre a igualdade se, e só se $a_1 = \cdots = a_n$.

Desigualdade de Jensen: sejam $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e convexa. Se $a_1, \dots, a_n \in I$ e $t_1, \dots, t_n \in (0,1)$ temos $f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + \cdots + t_nf(a_n)$, com igualdade se a inclinação de f for constante no intervalo I ou caso contrário se, e só se $a_1 = \cdots = a_n$. Se f for côncava vale a desigualdade inversa.

Desigualdade de Hölder: sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\sum_{i=1}^n a_ib_i \leq (\sum_{i=1}^n {a_i}^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n {b_i}^q)^{\frac{1}{q}}$, com igualdade se, e só se, $\frac{{a_1}^p}{{b_1}^q} = \cdots = \frac{{a_n}^p}{{b_n}^q}$. Está desigualdade generaliza a Desigualdade de Cauchy-Schwarz tomando $p = q = 2$.

Desigualdade de Minkowiski: sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^*$, $p \in \mathbb{R}$ e $p > 1$, temos $(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, com igualdade se, e só se, $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Está desigualdade generaliza a bem conhecida desigualdade triangular se $n = 1$e $p = 1$.

Por fim, finalizamos o trabalho aplicando essas desigualdades para: ***i)*** encontrar as dimensões do cilindro circular reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio r; ***ii)*** determinar o maior volume possível de uma caixa retangular inserida em um elipsoide fixado. ***iii)*** sejam R e r respectivamente, as medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita a um triângulo qualquer, então $R \geq 2r$, com igualdade se, e só se, o triangulo for equilátero, a qual é conhecida como desigualdade de Euler; ***iv)*** sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, então $sen\alpha\ sen\beta\ sen\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ e $cos\alpha\ cos\beta\ cos\gamma \leq \frac{1}{8}$; ambas com igualdade se, e só se, o triangulo for equilátero.

Conclusão ou Conclusões

Com este trabalho fizemos um estudo detalhado de diversas desigualdades e pudemos perceber a sua importância e o papel fundamental que desempenham em Matemática e, principalmente, em Análise.

Agradecimentos

A UEPG pela oportunidade e ao CNPq pela bolsa.

1) NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar: números reais**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1.
2) BECKENBACH, E.; BELLMAN, R. **An Introduction to Inequalities**. New York: The L. W. Singer Company, 1961.
3) MITRINOVIC, D. S. **Elementary Inequalities**. Belgrade: Noordhoff, 1964.