TRANSFERÊNCIA PERFEITA DE ESTADO EM GRAFOS E CADEIAS DE SPIN

Paulo Eduardo Lopes da Rosa (PROVIC/UEPG), Fabiano Manoel de Andrade (Orientador), e-mail: fmandrade@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/ Departamento de Matemática e Estatística.

Física, Física Geral

Palavras-chave: Informação Quântica, Estados Quânticos, Qubits.

Resumo

Este trabalho baseou-se em pesquisas recentes em informação quântica e o uso de grafos para descrever estados quânticos, com foco no mecanismo por trás de uma transferência de estado quântico na qual temos 100% de fidelidade, ou seja, um estado presente num local é transmitido para outro de forma perfeita. Essa transferência é estudada onde temos nosso estado quântico passando por uma cadeia de spins [1] de elétrons. Essas cadeias não são a única maneira de transmitirmos nossa informação, mas nosso trabalho teve foco neste modelo físico. Quando falamos em locais estamos nos referindo a vértices de grafos, e suas arestas não representam uma ligação no sentido da palavra, mas sim um acoplamento. No andamento das nossas pesquisas, observamos que a transferência perfeita de estado não é permitida para todo e qualquer grafo, apenas em alguns casos, e o motivo pelo qual não conseguimos realizar essa transferência perfeita foi encontrado em artigos publicados no contexto da transferência de estados, que dizem que o espectro dos grafos [2] estudados não a permitem.

Introdução

Na computação clássica, a base da nossa informação são os bits. Quando falamos em computação quântica temos como base fundamental de informação o qubit. Em vez de decompormos nossa informação em combinações de 0 e 1, agora podemos ter a sobreposição desses dois. Na prática, em um computador quântico conseguiríamos fazer inúmeras tarefas ao mesmo tempo, aumentando o número de qubits trabalhando.

Nosso qubit pode assumir os estados $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, e a grandeza associada a isso no nosso contexto é o spin, ou seja, spin para cima nos trás o estado $|0\rangle$ e para baixo $|1\rangle$. Portanto, temos que o estado mais geral de um qubit é dado através de uma sobreposição dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Desta forma, o estado de um qubit pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle.$$

onde α e β são amplitudes. Podemos utilizar a representação na esfera de Bloch [3], para reescrever o estado acima como

$$|\psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}sen\frac{\theta}{2}|1\rangle,$$

onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$ são ângulos. A esfera de Bloch é mostrada na Figura 1.

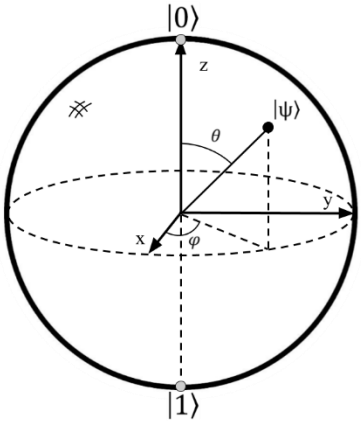


Figura 1: Estado quântico representado na Esfera de Bloch.

Lembramos que essa representação é útil no caso de um sistema de um qubit apenas, para sistemas com 2 ou mais qubits, não há generalização dessa esfera. Não é a única interpretação de nossa unidade de informação, mas uma útil para entendermos com o que estamos trabalhando.

A teoria de grafos é poderosa e temos hoje suas aplicações em diversos sistemas, sites da internet, redes e etc. Associando os estados quânticos aos vértices dos grafos temos uma maneira matemática de manipular nossa informação em uma rede, mas veremos que nem todo grafo permite essa transferência que queremos realizar.

Inicialmente foi necessária a pesquisa sobre a Teoria dos Grafos em si, na qual o projeto se baseia. Um grafo é definido por [4] $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas associadas ao grafo G. Na Figura 2 mostramos o grafo caminho P_2.

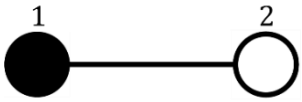


Figura 2: O grafo P_2. Cada vértice representa um estado quântico, |1⟩ ou |2⟩. No grafo acima o vértice em preto representa que o estado quântico inicial é $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$**.**

No contexto do estudo de transferência de estados quânticos em grafos [6], os vértices representam estados quânticos e as arestas os acoplamentos entre eles. Para a compreensão do objetivo principal, foi feito o uso de artigos científicos recentes. Esses artigos representavam principalmente a parte física do problema, mas nos últimos meses foi necessária a leitura daqueles que traziam a parte matemática, assim como suas explicações.

Para realizarmos nossa transferência de estado, utilizamos o operador $U(t) = \exp(iAt)$ [5], onde A é a matriz adjacência do grafo de ordem $n \times n$, onde n é o número de vértices do grafo. Temos também que a matriz U é unitária, $U(t)U^*(t) = 1$. A matriz adjacência é definida por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \sim j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

($i \sim j$ diz que i e j são adjacentes, ou seja, estão conectados). Para usarmos esse operador nas nossas transferências de estado, escrevemos ele à partir de uma expansão em série de Taylor da função exponencial, ou seja

$$U(t) = \exp(iAt) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iAt)^m}{m!} .$$

Materiais e Métodos

Este trabalho baseia-se em estudos e pesquisa teóricos em Mecânica Quântica e Álgebra Linear. Logo como materiais, fizemos uso de literatura predominantemente estrangeira, no início, material de escrita para os desenvolvimentos matemáticos, passando para o uso do software Mathematica, e alguns softwares de criação e representação de figuras.

Resultados e Discussão

Verificamos como ocorre a transferência perfeita de estado (TPE) para os grafos P_2, P_3, e P_4. Através da aplicação do nosso operador de evolução temporal $U(t)$ de cada grafo, obtivemos nosso estado quântico nos vértices finais. Os estados quânticos do grafo P_2 são definidos como $|1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $|2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Para os grafos P_n subsequentes utilizamos uma linha a mais para cada vértice adicional, por exemplo, para o P_3 temos $|1\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $|2\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $|3\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ e assim por diante.

No caso do P_2, aplicando o operador de evolução temporal no estado inicial $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$, temos

$$|\psi(t)\rangle = U_{P_2}(t)|\psi(0)\rangle = \begin{bmatrix}\cos(t) & i\mathrm{sen}(t)\\ i\mathrm{sen}(t) & \cos(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(t)\\ i\mathrm{sen}(t)\end{bmatrix}.$$

Na equação acima observamos que para $t = \pi/2$, $|\psi(\pi/2)\rangle = i|2\rangle$, ou seja, obtemos o estado quântico do vértice 2 a menos de uma fase global i.

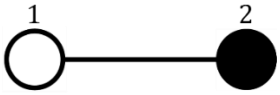


Figura 3: O grafo acima representa o estado $|2\rangle$, nota-se que $|\psi(\pi/2)\rangle = |2\rangle$.

Para o P_3, verificamos que $U_{P_3}\left(\pi/\sqrt{2}\right)|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix} = -1|3\rangle$. Ou seja, temos a TPE entre os estados $|1\rangle$ e $|3\rangle$ a menos de uma fase global -1.

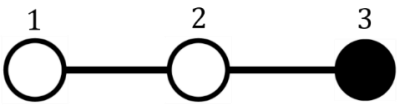


Figura 4: O grafo acima representa o estado $|3\rangle$ no grafo P_3.

Agora, para o grafo P_4 verificamos que o grafo não admite TPE para nenhum tempo t. Essa impossibilidade da TPE é observada para todo grafo caminho com mais de 3 vértices. Na literatura, esse comportamento é explicado através do espectro da matriz de adjacência do grafo.

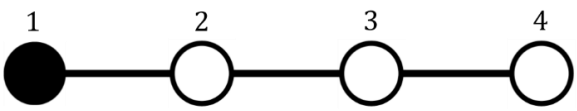


Figura 5: O grafo acima representa o estado $|1\rangle$ do grafo P_4.

Conclusões

Verificamos que a transferência perfeita de estado ocorre no grafo P_2 para o tempo de $\pi/2$, no P_3 para o tempo de $\pi/\sqrt{2}$ e a partir do P_4 não temos mais a transferência perfeita devida ao espectro do grafo utilizado.

Ao término desse trabalho, nos tornamos capazes de entender melhor a transferência de estados quânticos quando estes são representados por grafos e cadeias de spin. O estudo das propriedades de grafos, da mecânica quântica, e da álgebra linear, assim como a pesquisa em cima dos modelos físicos abordados, nos trouxe a capacidade de entender melhor como a Teoria de Grafos pode ser aplicada à fenômenos da informação quântica e o seu aproveitamento nesta subárea da ciência.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Fabiano pela orientação e paciência no ensino dos conteúdos abordados.

Referências

[1] BOSE, Sougato. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. **Contemporary Physics**, [s.l.], v. 48, n. 1, p.13-30, jan. 2007.
[2] COUTINHO, Gabriel de Morais. Graph spectra and quantum walks. In: CANADAM, 2015, Saskatoon, **Anais…** Saskatoon: University of Saskatchewan, 2015.
[3] NIELSEN, Michael Aaron; CHUANG, Isaac. **Quantum Computation and Quantum Information**. 2. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010. 670 p.
[4] CHRISTANDL, Matthias; DATTA, Nilanjana; EKERT, Artur. LANDAHL, Andrew John. Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 92, n. 18, p.1-1, 4 maio 2004.
[5] COUTINHO, Gabriel de Morais. **Quantum State Transfer in Graphs.** 2014, 128. Combinatorics and Optimization – Universidade de Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2014.
[6] COUTINHO, Gabriel de Morais. New Examples of Perfect State Transfer. In: A CONFERENCE TO CELEBRATE THE WORK OF CHRIS GODSIL, 2003, Waterloo. **Anais**... Waterloo: University of Waterloo, 2003.
[7] COUTINHO, Gabriel de Morais. Recent developments in quantum state transfer. In: 22ND ONTARIO COMBINATORICS WORKSHOP, 2014, Toronto. **Anais**… Toronto: York University, 2014.
[8] GODSIL, Chris. State transfer on graphs. **Discrete Mathematics**, [s.l.], v. 312, n. 1 , p.129-147, jan. 2012. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2011.06.032.
[9] COUTINHO, Gabriel de Morais. Orthogonal polynomials and quantum walks. In: MINIWORKSHOP: QUANTUM DYNAMICS ON GRAPHS, 2015, Londres. **Anais…** Londres: University College of London, 2015.
[10] BOSE, Sougato. Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 91, n. 20, 10 nov. 2003. American Physical Society (APS). http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.91.207901.