COEXISTÊNCIA DE CAOS E PERIODICIDADE EM SISTEMAS DINÂMICOS HAMILTONIANOS

Maria Clara Rodrigues Istschuk (PIBIC/Fundação Araucária), Michele Mugnaine, José Danilo Szezech Junior (Orientador), email: jdanilo@gmail.com.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Matemática e Estatística/Ciências Exatas e Naturais.

1.05.01.00-2 – Física Geral

Palavras-chave: Sistemas Hamiltonianos, Expoente de Lyapunov, Dinâmica Não Linear, Caos.

Resumo

O objetivo deste projeto é estudar as regiões de *Stickness* no espaço de fase do mapa padrão. O mapa padrão é a descrição do comportamento de um rotor que está sujeito a perturbações. Elas fazem com que sua dinâmica possa ter coexistência de comportamentos lineares e não lineares. Ao fazer o espaço de fase desse mapa é possível perceber as regiões de comportamentos periódicos e caóticos. Também é possível observar as possíveis regiões de *Stickness* ao redor das ilhas, que foram analisadas a partir do expoente de Lyapunov, para serem confirmadas como regiões de armadilhas dinâmicas e sua respectiva convergência.

Introdução

O mapa padrão é estudado a partir do modelo proposto por Chirikov em 1979 [1]. Este mapa descreve o comportamento de um rotor que consiste de uma barra fixa em uma das extremidades, sem atrito, que rotaciona neste ponto. Este rotor está sujeito a perturbações causadas por uma força externa [2]. A função Hamiltoniana abaixo descreve o mapa padrão [1], onde K é a perturbação gerada, p é o momento angular do rotor e x a posição deste.

$$H(p,x,t) = \frac{1}{2}p^2 - K\cos x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n), \qquad (1)$$

A partir desta equação é possível obter as equações de movimento do rotor pulsante, sendo elas uma para a posição e outra para o momento angular, que geram o mapa padrão. Outro conceito importante para este projeto é o expoente de Lyapunov, que mostra a dependência do sistema às condições iniciais, a partir dele, é possível diferenciar as trajetórias caóticas das regulares.

Para a análise do comportamento do mapa padrão, um espaço de fase foi gerado buscando conjuntos de condições iniciais que gerassem a coexistência de regiões periódicas e caóticas. As armadilhas procuradas se encontram ao redor das

ilhas remanescentes e podem aprisionar trajetórias caóticas por um grande intervalo de tempo. A este fenômeno dá-se o nome de *Stickness*.

Materiais e Métodos

Foram usados programas na linguagem Fortran para gerar o espaço de fase do mapa padrão e calcular o expoente de Lyapunov. Esse expoente mede a taxa de divergência que a trajetória podendo ser positivo, negativo ou nulo. Como buscamos estudar a presença de armadilhas dinâmicas, buscamos um parâmetro onde há a coexistência de regularidade e caos. Assim, escolhemos o parâmetro K = 6,476939 [3]. Foi feita então a análise dos espaços de fase.

Várias condições iniciais foram escolhidas de forma aleatória até ser encontrados conjuntos de condições que ficaram presas nas regiões de *Stickness*. Então o expoente de Lyapunov foi calculado para essas regiões e sua convergência analisada também.

Resultados e Discussão

Os primeiros resultados obtidos foram do espaço de fase gerado com as respectivas ampliações. As imagens a seguir, ilustram esses espaços de fase mostrando suas ilhas, sendo a primeira imagem a primeira ilha, a segunda uma ilha interna e assim sucessivamente.

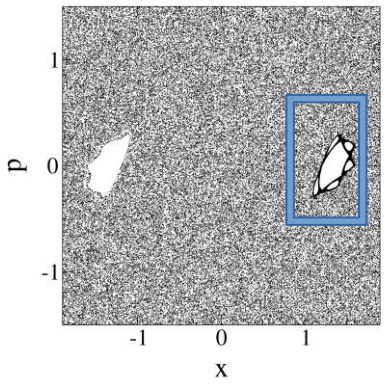


Figura 1 (a)

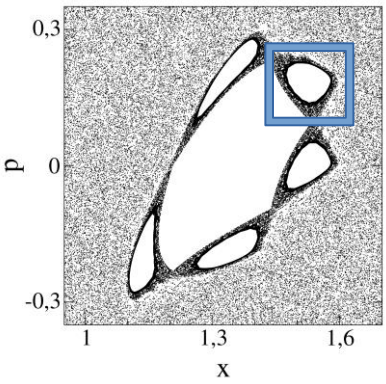


Figura 1 (b)

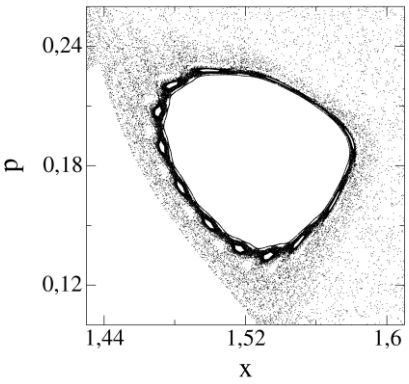


Figura 1 (c)

Fonte: autora

As ilhas internas ampliadas estão indicadas na figura através de um frame azul. As regiões pontilhadas, em preto, representam o mar caótico, enquanto que as regiões em branco representam as ilhas periódicas. As regiões mais escuras, que são grandes concentrações de pontos ao redor das ilhas, representam possíveis regiões de *Stickness*.

As figuras a seguir demonstram a análise do expoente de Lyapunov nas regiões ao redor da ilha principal – correspondente à figura 1 (b). Na sequência tem uma ampliação do Lyapunov no tempo de aprisionamento, que está indicado pelo frame azul, seguido da série temporal, que é a representação da posição na evolução temporal.

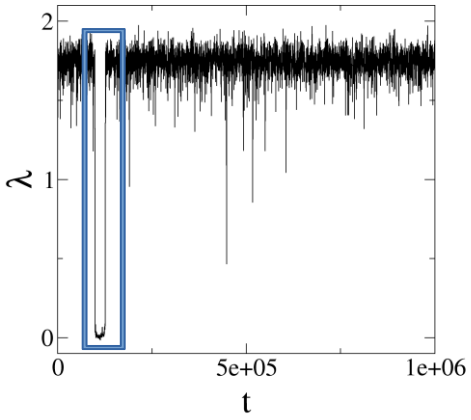


Figura 2 (a)

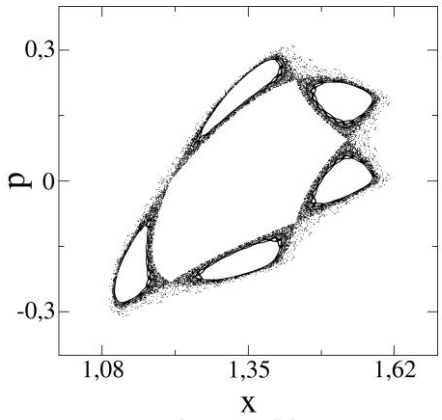


Figura 2 (b)

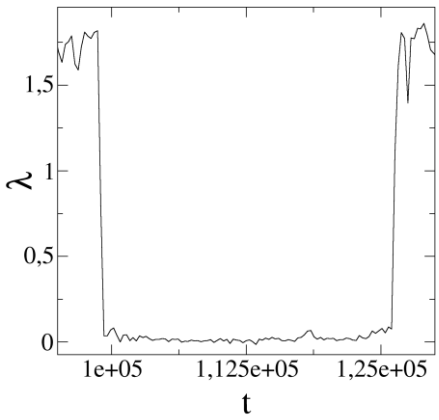


Figura 2 (c)

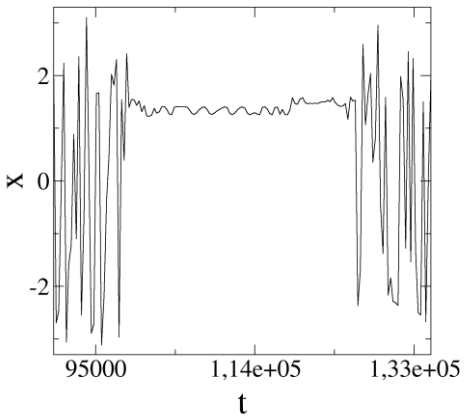


Figura 2 (d)

Fonte: autora

Na figura 2 (a) é possível perceber que o expoente de Lyapunov cai próximo à zero em um período de tempo. Na figura 2 (b) é possível perceber que a trajetória que essa condição inicial faz durante esse intervalo de tempo é aprisionada ao redor da ilha, isso significa que aquela região é uma região de *Stickness.* Na figura 2 (c) vemos a ampliação do Lyapunov no intervalo de tempo escolhido. Ao lado, na figura 2 (d) vemos a série temporal do espaço de fase.

A seguir, se tem a figura da convergência do expoente de Lyapunov. Ela mostra o comportamento do expoente no mar caótico, que é um valor positivo, nas ilhas, que é zero e nas regiões de *Stickness*, que se aproxima de zero, pois o comportamento é aparentemente regular. As figuras 3 (a) e (b) estão comparadas sendo a (a) a convergência e a (b) o espaço de fase. O valor do expoente está representado pela letra λ.

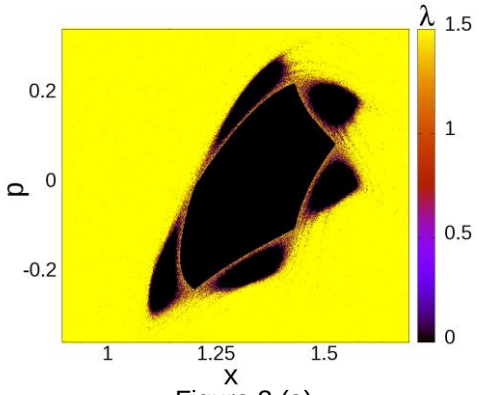


Figura 3 (a)

Fonte: autora

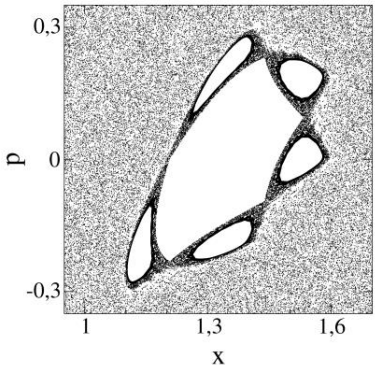


Figura 3 (b)

Essas figuras fazem parte de outra forma de mostrar como as regiões de *Stickness*. A convergência do Lyapunov é uma forma de identificar *Stickness* porque é necessário um intervalo maior de tempo para observar as regiões, ou seja, a trajetória que é caótica demora um tempo maior para ter um Lyapunov positivo, pois ela fica aprisionada ao redor da ilha, tendo um comportamento quase regular.

Conclusões

O mapa padrão é um sistema clássico de dinâmica de sistemas não lineares. Ele representa a coexistência de caos e regularidade e é um candidato para apresentar regiões com armadilhas dinâmicas. A observação destas armadilhas foi feita pelo espaço de fase, nas regiões que apresentavam uma grande concentração de pontos e também pelo expoente de Lyapunov a tempo finito. É possível identificar as regiões de *Stickness* por esses métodos apresentados neste projeto. Com todas as análises feitas o projeto foi satisfatório e o que foi proposto foi realizado. O expoente de Lyapunov foi eficaz para encontrar as regiões de Stickness sugeridas pelo espaço de fase, incluindo a análise da convergência deste. As regiões de aprisionamento dinâmico foram encontradas assim como o projeto previa.

Agradecimentos

Agradecimentos à Fundação Araucária pelo suporte financeiro, à Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Referências

[1] SZEZECH, J. D.; LOPES S. R.; VIANA, R. L. Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems. Physics Letters A, 335, 394–401, 2005.

[2]WOELLNER, Cristiano. **Aspectos dinâmicos de uma rede de mapas Hamiltonianos acoplados**. 2006. 63f. Tese (Pós-graduação em Física) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

[3] S. Benkadda, S. Kassibrakis, R. B. White, e G. M. Zaslavsky. Self-similarity and transport in the standard map. Physical Review E, v. 55, n. 5, 1997.