O TEOREMA DA FUNÇÃO INVERSA E APLICAÇÕES

Maria Verônica Bartmeyer (PICME/Capes-Cnpq), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática - Análise.

Palavras-chave: Continuidade, derivadas, características, espaço, Banach.

Resumo

O Teorema da Função Inversa é um dos principais resultados da Análise, o qual nos diz quando uma função f é inversível, desde que sua derivada f' cumpra certas condições. Entre suas aplicações, citamos o Teorema da Função Implícita, o Teorema Fundamental da Álgebra, o Método das Características para resolução de EDPs de primeira ordem, o qual será tratado neste trabalho, entre outras. O presente trabalho tem por objetivo enunciar, demonstrar e estender o Teorema da Função Inversa, bem como aplicá-lo para justificar o método das Características. A demonstração deste teorema é feita com a utilização dos métodos da Análise Matemática em $\mathbb{R}^n$, em especial usando argumento de compacidade, e para sua extensão aos espaços vetoriais normados, utiliza-se também métodos da Análise Funcional, como o Princípio da Contração e o Teorema do Ponto Fixo.

Introdução

A ideia de usar letras para denotar incógnitas e coeficientes foi introduzida por Fraçois Viète (1540-1603) e, mais tarde, com a inspiração do sistema de coordenadas de René Descartes (1596-1650), vieram os métodos algébricos. Inicialmente, muitas funções foram definidas implicitamente, Isaac Newton procurou descrever o comportamento de funções implícitas, e Leibniz aplicou a diferenciação implícita, por volta de 1684. Curiosamente, em 1770, Joseph Lagrange provou o que pode ser o primeiro Teorema da Função Implícita, mas de forma muito relacionada ao Terorema da Função Inversa. O resultado é conhecido como o Teorema da Função Inversa de Lagrange e é considerado como um caso especial do Teorema da Função Inversa para séries de potências. Apenas mais tarde, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) demonstra o Teorema da Função Implícita com rigor matemático e fica conhecido por ser o descobridor deste teorema.

Os teoremas da Função Implícita e da Função Inversa são equivalentes. O foco deste trabalho é apresentar o Teorema da Função Inversa, do ponto de vista da Análise no $\mathbb{R}^n$, compreender as condições que fazem válidos os itens da tese e quais condições

devem ser alteradas para que possamos fazer uma extensão para espaços de dimensão infinita.

Revisão de literatura

Este estudo teve como principal referência o livro Cálculo Avançado I [2], bem como demais fontes citadas nas Referências.

Resultados e Discussão

O enunciado do Teorema da Função Inversa em $\mathbb{R}^n$ é como segue:

Teorema 1 (Teorema da Função Inversa) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que o determinante da matriz jacobiana de f em x_0 seja não-nulo, isto é, $\mathcal{J}_f(x_0) \neq 0$. Então existe $\delta_0 > 0$ tal que

a) f é injetora em $U = B_{\delta_0}(x_0)$

b) $V = f(U)$ é aberto;

c) $f^{-1}: \mathrm{V} \to U$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e $\left[(f^{-1})'\left(f(x_0)\right)\right] = [f'(x_0)]^{-1}$.

Para demonstrá-lo, são necessárias quatro etapas, as quais estão descritas abaixo:

Etapa 1: Para mostrar que existe $\delta_0 > 0$ tal que f é injetora em $U = B_{\delta_0}(x_0)$, demonstrar que $f(x+h) \neq f(x)$ se δ é suficientemente pequeno.

Etapa 2: Em seguida, mostrar que existe $\delta_0 > 0$ tal que $f(B_{\delta_0}(x_0))$ é aberto.

Etapa 3: Tomando $U = B_{\delta_0}(x_0)$ e $V = f(U)$, provar então que $f^{-1}: \mathrm{V} \to U$ é diferenciável.

Etapa 4: Verificar por fim, que $\left[(f^{-1})'\left(f(x_0)\right)\right] = [f'(x_0)]^{-1}$ é de classe $\mathcal{C}^1$.

Como um exemplo de aplicação, o teorema da função inversa garante a validade da mudança de coordenadas no Método das Características. Ele consiste no ponto chave desse método, pois com uma mudança apropriada de coordenadas, podemos sair do problema de resolver uma equação diferencial parcial de primeira ordem e resolver apenas um sistema de equações diferenciais ordinárias. O método das características é utilizado para a solução do seguinte

Problema: Seja uma curva de $\mathbb{R}^2$, parametrizada por: $\gamma: I \to \Omega$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e Ω um aberto de $\mathbb{R}^2$. Sejam $a, b, c: \Omega \to \mathbb{R}$ funções dadas. Determinar uma função $\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ solução da equação

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}} + b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}} = c(x,y)\ ,$$

cujos valores sobre a curva são prescritos, isto é $\varphi\big(\gamma(\xi)\big) = \varphi_0(\xi)$ onde $\varphi_0: I \to \mathbb{R}$ é uma função dada.

Por outro lado, pode-se estender o teorema da Função Inversa a espaços de Banach de dimensão infinita, para isso substituímos a condição "$\mathcal{J}_f(x_0) \neq 0$" por "$f(x_0)$ invertível", conforme segue abaixo:

Teorema 2 (Extensão do Teorema da Função Inversa para Espaços de Banach) Seja W um espaço de Banach, $\Omega \subset W$ aberto e $f: \Omega \to W$ função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $f'(x_0)$ é invertível. Então existe U $\subset W$ uma vizinhança aberta de x_0 tal que
a) $V = f(U)$ é aberto em W;
b) $f: U \to V$ ´e difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^1$.

Conclusões

Concluímos que a demonstração do teorema da função inversa em espaços de dimensão finita está relacionada a continuidade de funções em conjuntos compactos, ou seja, faz uso da compacidade da bola fechada. Por outro lado, para que possamos estender este resultado a espaços de dimensão infinita, foi necessário substituir a condição do determinante jacobiano diferente de zero, pela condição de que a derivada da f seja invertível; além de termos que usar a extensão do conceito de difereciabilidade de uma função para espaços normados, bem como o Princípio da Contração e o o Teorema do Ponto Fixo.

Agradecimentos

À Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ao orientador do projeto, Prof. Dr. Marciano Pereira e ao colega de iniciação científica. Ao PICME/CNPq pela bolsa.

Referências

[1] ANDRADE, Doherty. O Teorema da Função Inversa e da Função Implícita. Publicação Eletrônica. Disponível em: http://www.dma.uem.br/kit/arquivos/arquivospdf/ inversa.pdf. Acesso em: 31 agosto 2018.
[2] CIPOLATTI, Rolci. Cálculo Avançado I. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2002.
[3] DOMINGUES, Hygino H. Espacos Métricos e Introdução à Topologia. São Paulo: Atual, 1982.
[4]KRANZ, S.; Parks, H. The Implicit Function Theorem – History, Theory and Applications. Birkhäuser: Boston-Basel-Berlin.
[5] KREYSZIG, Erwin. Introductory functional analysis with applications. Normed Spaces. Banach Spaces. 1a ed. John Wiley Sons, 1978.
[6] LEWIS, David W. Matrix Theory. Singapore: World Cientific, 1991.
[7] LIMA, Elon L. Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.
[8] MORIYA, Alex Issamu. Os Teoremas de Funções Inversa e Implícita e suas Aplicações. 2011. 60 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2011.

[9] NETO, Antônio C. M. Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 Introdução¸ à Análise. A Concavidade de uma Função 2a ed. SBM, 2013.
[10] TEZOTO, Leandro. Sobre o Teorema da Função Inversa. 37f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.