APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR NA OTIMIZAÇÃO DE UM SUPORTE DE PAREDE SOB AÇÃO VERTICAL DE UMA FORÇA

João Pedro Herche Cavasotti (PICME/UEPG), Scheila Valechenski Biehl (Orientadora), e-mail: svbiehl@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento do Orientador. Fonte Arial 12, normal, centralizado, espaço simples.

Matemática Aplicada (1.01.04.00-3), Pesquisa Operacional (3.08.02.00-8)

Palavras-chave: otimização, programação não-linear, condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Resumo

A aplicação da programação não linear é uma técnica bastante utilizada, principalmente nas áreas de exatas e engenharias, onde muitas restrições físicas ou operacionais de um sistema apresentam a característica de não-linearidade. Este trabalho consiste em projetar um apoio de parede para suportar uma certa carga, cujas restrições físicas do problema são representadas pela tensão do material e pelo estresse da barra. A função objetivo envolve a minimização do volume, dado pelo produto das áreas da seção transversal pelo comprimento da barra, sujeito às condições de tensão e estresse sobre a barra e não negatividade das variáveis do problema. O método utilizado para resolução foi a análise das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), cujos cálculos forneceram os resultados para a dimensão ótima do apoio, e tais valores foram verificados por meio de um software de otimização.

Introdução

Nos últimos anos, os problemas de otimização vêm recebendo grande importância na área acadêmica, sendo identificados em diversos projetos, minimizando ou maximizando funções específicas. Grande parte disso vem do avanço tecnológico e da busca pela economia de tempo e dinheiro. A otimização não linear envolve uma função que deve ser maximizada (ou minimizada) sujeito a um conjunto de restrições, em que pelo menos uma destas deve ter a característica de ser não linear, e em geral o ponto ótimo se encontra no contorno ou no interior do domínio da região de soluções viáveis.

Atualmente existem vários programas eficazes de otimização, como por exemplo, o *GAMS* (*General Algebraic Modeling System*) e o *LINGO (*software para otimização de problemas lineares e não lineares). Porém, o estudo teórico é necessário e importante no sentido de desenvolver métodos que tratem das particularidades específicas de cada problema, como confiabilidade e operabilidade do sistema, disponibilidade de recursos, natureza das variáveis, entre outros.

Revisão da Literatura

Na área de engenharia, a otimização de problemas visa melhorar as características de um sistema e minimizar os custos envolvidos no projeto. No trabalho de Klein (2008) é apresentado um dimensionamento ótimo de elementos estruturais de uma viga de concreto armado, através do uso de algoritmos genéticos, de modo a minimizar o custo do projeto e atender aos requisitos de segurança associados aos

limites de ruptura e à imposição de normas técnicas. Em Maia (2009), é feita uma revisão de conceitos de otimização e são utilizados os métodos Simplex e Gradiente Reduzido Generalizado para implementar o projeto ótimo de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples. Nogueira e Venturini (2011) apresentam um modelo para minimizar o custo total de um projeto de uma viga hiperestática em concreto armado, por meio do Método dos Multiplicadores de Lagrange, no qual a formulação é apresentada analiticamente em termos das equações de equilíbrio para flexão, de compatibilidade e mais uma restrição dada em termos de confiabilidade.

O problema de programação não-linear é proposto através da modelagem de uma função objetivo f(x) e condicionada por equações e/ou inequações lineares ou não-lineares. Em geral, a variável é representada pelo vetor $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ e a estrutura do problema de otimização é representada, como:

Minimizar f(x), sujeito a $\{h_i(x) = 0, i = 1, ..., p,$ (1)
$\{g_j(x) < 0, j = 1, ..., m,$

O Método dos Multiplicadores de Lagrange é um procedimento para obter os pontos de máximo local ou mínimo local de uma função diferenciável quando suas variáveis estão sujeitas a restrições. As condições de otimalidade de KKT, vistas em Luenberguer (2003), assumem que se *x** é um mínimo local para *f(x)* sujeita às restrições dada, então existem multiplicadores de Lagrange *v* (restrições de igualdade) e *u* (restrições de desigualdade) tal que a função de Lagrange é estacionária em relação a *x*, *v*, *u* e *s*, onde todas as derivadas são calculadas no ponto *x**, isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{I=1}^{P} v_I^* \times \frac{\partial h_i}{\partial x_k} + \sum u_i^* \times \frac{\partial g_j}{x_k} = 0; k = 1, \dots, n \quad (2a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = 0 \rightarrow h_i(x^*) = 0; i = 1, \dots, p \quad (2b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = 0 \rightarrow g_j(x^*) + S_j^2 = 0; j = 1, \dots, m \quad (2c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_j} = 0 \rightarrow 2u_j^* \times s_j = 0; j = 1, \dots, m \quad (2d)$$

$$u_j^* \geq 0; j = 1, \dots, m \quad (2e)$$

Resultados e Discussão

Um suporte de parede deve ser projetado para suportar uma carga de 1.2 MN, o material não deve falhar sob a ação de forças nas barras e o volume do suporte deve ser minimizado (Arora, 1989). As áreas das seções transversais A_1 e A_2 são as duas variáveis de projeto e a função de custo para o problema é o volume, dado como $f(A_1, A_2)=l_1 A_1+ l_2 A_2$ cm^3, onde l_1 = 50cm e l_2 = 40cm são os comprimento das barra 1 e 2, como mostra a Figura 1.

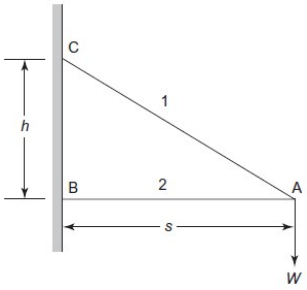


Figura 1 – Representação do suporte de parede

Para escrever as restrições de tensão usamos as forças nos membros que são dadas por F_1=2,0x10^{6}N e F_2=1,6x10^{6}N, e a condição que a tensão na barra não pode exceder a tensão máxima permitida de 16.000N, assim essas restrições são dadas como (F_1/A_1)<=16.000 e (F_2/A_2)<=16.000. Além disso, as áreas transversais devem ser ambas não-negativas. Dessa maneira, o problema de otimização fica formulado matematicamente como:

Minimizar $f(A_1; A_2) = 50 \times A_1 + 40 \times A_2$ (3a)

Sujeito a : $g_1 = \frac{2 \times 10^6}{A_1} - 16000 \leq 0$ (3b)

$g_2 = \frac{1{,}6 \times 10^6}{A_2} - 16000 \leq 0$ (3c)

$g_3 = -A_1 \leq 0,$ (3d)

$g_4 = -A_2 \leq 0$ (3e)

Para analisar as condições de otimalidade de KKT, acrescentamos as variáveis de folga s_i^2, onde i=1,2,3,4, nas restrições de desigualdade para torná-las restrições de igualdade, e escrevemos a função de Lagrange para este problema, dada por:

$$L = 50 \times A_1 + 40 \times A_2 + u_1\left(\frac{2 \times 10^6}{A_1} - 16000 + {S_i}^2\right) + u_2\left(\frac{1{,}6 \times 10^6}{A_2} - 16000 + {S_2}^2\right) + u_3\left(-A_1 + {S_3}^2\right) + u_4\left(-A_2 + {S_4}^2\right) \quad (4)$$

Para poder analisar de maneira mais viável as variáveis u_i e s_i, é necessário construir um planejamento fatorial em dois níveis (MONTGOMERY, 1991) das variáveis u_i (i=1,2,3,4) pois estas podem assumir apenas dois valores, zero ou um valor qualquer positivo. O planejamento fatorial é um método a ser utilizado para medir os efeitos (ou influências) de uma ou mais variáveis na resposta de um processo, e sua representação em dois níveis é 2^k, onde 2 significa o número de níveis e k o número de fatores. Como neste caso temos 4 variáveis, tem-se 2^n=2^4=16 possibilidades, as quais são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Possíveis valores de u_i e s_i

casos	u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	s_4	casos	u_1	u_2	u_3	u_4	s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	0	0	0	arb.	arb.	arb.	arb.	**9**	>0	0	0	0	0	arb.	arb.	arb.
2	0	0	0	>0	arb.	arb.	arb.	0	**10**	>0	0	0	>0	0	arb.	arb.	0
3	0	0	>0	0	arb.	arb.	0	arb.	**11**	>0	0	>0	0	0	arb.	0	arb.
4	0	0	>0	>0	arb.	arb.	0	0	**12**	>0	0	>0	>0	0	arb.	0	0

5	0	>0	0	0	arb.	0	arb.	arb.	**13**	>0	>0	0	0	0	0	arb.	arb.
6	0	>0	0	>0	arb.	0	arb.	0	**14**	>0	>0	0	>0	0	0	arb.	0
7	0	>0	>0	0	arb.	0	0	arb.	**15**	>0	>0	>0	0	0	0	0	arb.
8	0	>0	>0	>0	arb.	0	0	0	**16**	>0	>0	>0	>0	0	0	0	0

Analisando os casos desse procedimento sistemático, substituindo os valores nas equações das condições de KKT, alguns casos já podem ser descartados pois violam alguma das restrições, por exemplo, quando s_3 e/ou s_4 são 0, a área A tem valor inválido na prática (zero). Após isso, restam os casos 1, 5, 9 e 13. No caso 1 e no caso 5, chegamos a uma igualdade do tipo 50=0 e 40=0, que os tornam inválidos. O caso 9 também resulta 40=0 e é descartado. No caso 13, os valores resultantes são A_1=125cm^2 e A_1=100cm^2, o que fornece o valor f(A_1, A_2)=10.250cm^3 para a função objetivo.

Conclusões

Não existe um método universal para resolução de um problema de otimização não-linear, os métodos em geral são desenvolvidos e podem ser adaptados para particularidades de cada problema específico, ficando a cargo do executor determinar o que melhor se encaixa ao seu projeto. Nesse trabalho, foi usado o método mais geral da programação não-linear desenvolvido por Karush-Kuhn-Tucker (KKT), para determinar a solução ótima para o projeto de um apoio de parede, o qual deve suportar uma certa carga e não exceder os limites das restrições físicas do problema.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora Professora Scheila Valechenski Biehl por toda a ajuda e esforço para que esse projeto fosse concretizado, agradeço ao Cnpq financiador dessa iniciação científica e ao Professor Roberto Ribeiro pelo apoio ao projeto.

Referências

1-ARORA, J.S. Introduction to optimum design. McGraw-Hill Book Company, 1989.
2-KLEIN, H. W.,2008. Otimização de Vigas de concreto armado: dimensionamento a flexão. TCC, Unijuí, RS.
3-LUENBERGER, D.G. Linear and nonlinear programming. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.
4-MAIA, J. P. R., 2009. Otimização estrutural: estudos e aplicações em problemas clássicos de viga utilizando a ferramenta solver. Universidade de São Paulo, 2009.
5-MONTGOMERY, D. C. Design and Analysis of Experiments. John Wiley, 1991.
6-NOGUEIRA, C. G.; VENTURINI, W. S. Modelo para projeto ótimo baseado em confiabilidade: aplicação a uma viga em concreto armado. Cadernos de Engenharia de Estruturas, v. 13, n. 61, p. 47-62, 2011.