ANÁLISE DAS ÓRBITAS PERIÓDICAS E DAS BACIAS DE ATRAÇÃO EM UM MODELO DE COMPETIÇÃO DE ESPÉCIES

Enrique Chipicoski Gabrick (Fundação Araucária), Sandro Ely de Souza Pinto, desouzapinto@gmail.com

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física.

Física Geral. Métodos Matemáticos da Física.

Palavras-chave: Competição de espécies, Lotka-Volterra, Mapa Logístico.

Resumo

Neste trabalho discutimos a modelagem matemática via equações diferenciais da dinâmica populacional. Inicialmente, apresentamos a equação logística. Após, discutimos as equações de Lotka-Volterra. Por fim, discutimos o comportamento de um mapa logístico. Analisamos o comportamento das equações diferenciais através de gráficos e das suas soluções, para construir os gráficos utilizamos programas construídos nas linguagens C/C++ e Fortran 90, para traçar os gráficos e trajetórias usamos o Gnuplot e o Maxima.

Introdução

Para descrever a dinâmica populacional utilizamos modelos baseados em equações diferenciais (ED). Neste trabalho apresentamos dois modelos, o logístico e o de Lotka-Volterra, conforme as referências [1, 2, 3 e 4].

O crescimento de populações pode ser analisado a partir de uma única espécie sem interagir com outras e com recursos ilimitados, até populações em competição, podendo haver ou não extinção. Podemos ter, inclusive, competições indeterminadas que são mais complexas, pois precisam de conceitos de sistemas dinâmicos para serem estudadas de forma minuciosa [2, 3 e 5].

Neste trabalho, apresentamos a equação logística para o crescimento populacional seguido de uma análise do seu comportamento e das suas soluções. Prosseguindo, estudamos as equações de Lotka-Volterra para um modelo presa-predador, analisando o comportamento dessas equações seguido por suas soluções para um determinado caso. Por fim, apresentamos o mapa logístico e o seu comportamento. Essas discussões são feitas através de cálculos analíticos e gráficos gerados através de programas construídos nas linguagens C/C++ e Fortran 90 [1, 2, 3 e 4].

Revisão de Literatura

A equação logística indica a variação temporal de uma quantidade de indivíduos que depende de uma taxa de crescimento *r,* de uma constante *K = r/a (a = constante)* e é da seguinte forma [1, 2]:

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1-\frac{y}{K}\right)y \quad (1)$$

Podemos propor soluções constantes, com $y = 0$ ou $y = K$, essas soluções não permitem variações de y, ou seja, são valores de equilíbrio. Para obter informações mais detalhadas resolvemos a equação (1), cuja solução é [1].

$$y = \frac{ky_o}{\left[(k-y_o)e^{-rt} + y_o\right]} \quad (2)$$

Esse modelo descreve apenas uma espécie, mas precisamos estender o nosso estudo para duas espécie, para isso escrevemos as equações de Lotka-Volterra [1, 2 e 3].

$$\frac{dx}{dt} = x(a-\alpha y) \quad (3.1) \; ; \; \frac{dy}{dt} = y(-c+\gamma x) \quad (3.2)$$

Onde dx/dt é a taxa de crescimento da população de presas e dy/dt a taxa de crescimento da população de predadores, a é a taxa de crescimento da população de presas e c é a taxa de morte da populações de predadores, α e γ são medidas da interação entre as duas espécies. Estamos interessados no comportamento das equações (3) e suas soluções não negativas, para isso atribuímos alguns valores: $a = 1$, $\alpha = 0{,}50$, $c = 0{,}75$ e $\gamma = 0{,}25$ [1].

$$\frac{dx}{dt} = x(1-0{,}50y) = F(x,y) \quad (4.1); \quad \frac{dy}{dt} = y(-0{,}75+0{,}25x) = G(x,y) \quad (4.2)$$

Os pontos críticos são: $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = (3, 2)$. Inicialmente, analisamos o comportamento local em torno do ponto (0,0) desprezando os termos não lineares e construindo uma matriz cujos autovalores (1 e -0,75) e autovetores [6] estão ligados a solução do sistema que é a seguinte.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-0{,}75t} \quad (5)$$

Agora analisamos ao redor do ponto $(2,3)$, para isso construímos uma matriz jacobiana [1].

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0{,}5\,y & -0{,}5\,x \\ 0{,}25\,y & 0{,}25\,x-0{,}75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Calculamos os autovalores e autovetores [6].

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}\,i}{2} \quad \vec{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{bmatrix} ; \; r_2 = \frac{-\sqrt{3}\,i}{2} \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Efetuando mais algumas passagens podemos obter uma solução do tipo.

$$\ln(y) + \frac{3}{4}\ln(x) - \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = c \quad (8)$$

O mapa logístico associa um dado número x_n a outro número x_{n+1} onde x_n pode ser o número de indivíduos na n-ésima geração [5].

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \quad (9)$$

A constante r continua tendo o mesmo significado que introduzido inicialmente. Podemos obter uma série temporal $(n = 0, n = 1, n = 2, \ldots)$ do mapa logístico iterando o mapa a partir de um valor inicial x_o, e os valores de x_n podem ou não ficar oscilando entre N valores fixos, em caso positivo dizemos que a série é periódica com período-N. Para um período-1 cada ponto é levado nele mesmo e um período-2 os valores oscilando em torno de dois pontos, os períodos distintos se comportam de uma forma dita em cascata: 1, 2, 4,…, 2^m. Para estudarmos o mapa logístico usamos um diagrama de retorno (*cobweb*) que foi construído em Fortran 90 com um valor inicial de $x_o = 0{,}3$ e variando r [5].

Resultados e Discussão

Para o modelo logístico traçamos dois gráficos, um para a equação (1) e outro para a equação (2).

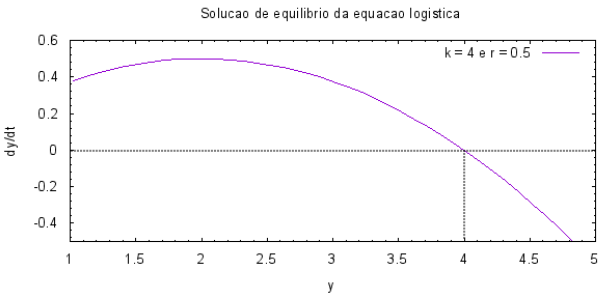


Gráfico 1: Comportamento da equação diferencial para o crescimento logístico, k = 4 e r = 0,5. Fonte: O autor.

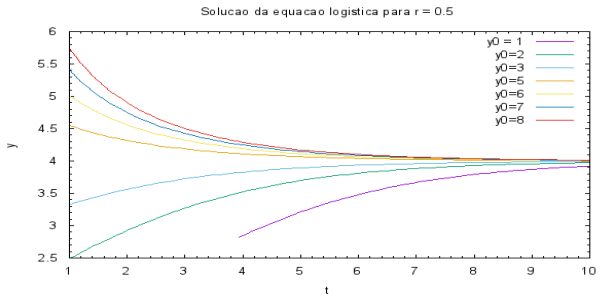


Gráfico 2: Solução da equação logística para vários valores iniciais. Fonte: O autor.

Do gráfico 1, concluímos que a população varia até um máximo e depois decresce até cortar o eixo em $y = k = 4$, que é um ponto de equilíbrio. Quando olhamos para o gráfico 2 podemos ver que para vários y_o as soluções tendem para o valor de K. Portanto, K é um fator limitante, isto é, um valor de capacidade de sustentação do ambiente.

Analisando o comportamento do sistema (4) traçamos campos de direções (gráfico 3) para essas equações e avaliamos o comportamento (gráfico 4).

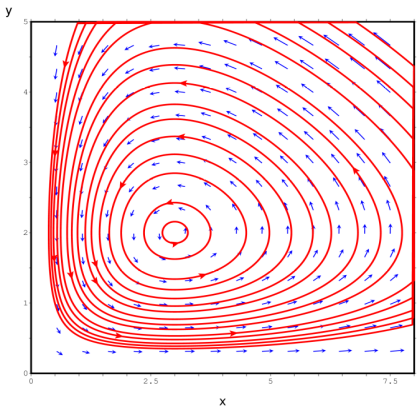


Gráfico 3: Campos de direções para o sistema (6) com suas respectivas linhas. Fonte: O autor.

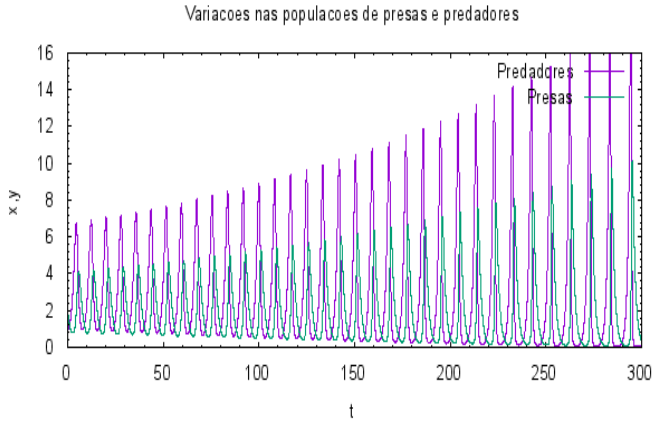


Gráfico 4: Competição presa-predador. Fonte: O autor.

Cada trajetória corresponde a um dado valor inicial, essas trajetórias estão centradas no valor (3,2) e são fechadas para algumas condições, isso significa que as espécies coexistem em trajetórias fechadas. Como os autovalores (7) são imaginários o ponto (3,2) é centro do sistema e é um ponto crítico estável, ao contrário de (0,0) que é um ponto de sela, pois os autovalores (1 e -0,75) apresentam sinais contrários. Para uma dada condição inicial ($x_o = 2, y_o = 1$) podemos ver que as espécies estão em competição mas se restituem ao longo do tempo.

Da matriz jacobiana podemos concluir que: F_x e G_y estão relacionadas as taxas de crescimento, F_y e G_x, estão relacionadas ao grau de interferência. Logo, 1) o sistema está em cooperação quando F_y e G_x são ambos positivos, 2) o sistema

está em competição quando F_y e G_x possuem sinais negativos e 3) o sistema é chamado presa-predador quando há sinais contrários.

Para o mapa logístico.

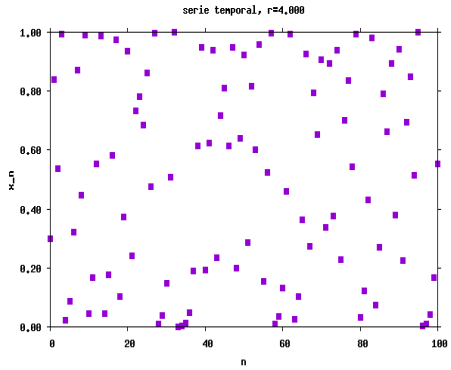


Gráfico 4: Evolução temporal de x_n vs n, para r = 4,000. Fonte: O autor.

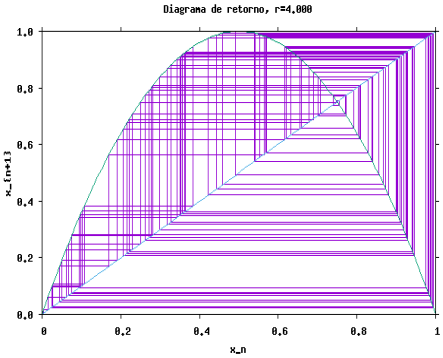


Gráfico 3: Diagrama de retorno para r = 4,000. Fonte: O autor.

Para valores pequenos de r (r = 2,000) podemos observar que a série temporal não fica dispersa e que podemos observar a periodicidade no gráfico, mas variando r, de forma gradual, podemos visualizar esse comportamento, apresentando caos.

Conclusões

Os modelos apresentados aqui nos possibilitam estudar casos mais complexos como competições indeterminadas, não foi possível reproduzir esses casos, pois exigem cálculos mais complexo.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Sandro Ely de Souza Pinto pela orientação e a Fundação Araucária pelo financiamento.

Referências

[1] Boyce, W.; DiPrima, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 663 p.
[2] Pereira, F. R.; **Variabilidade da Dimensão Instável em um Modelo de Competição Indeterminada.** 2006, 74p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Bacharelado em Física) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2006.
[3] Villate, J. E. **Introdução aos sistemas dinâmicos:** Uma abordagem prática com Maxima. Disponível em: <http://def.fe.up.pt/dinamica/>. Acesso em: 15 jan. 2018.
[4] Constantino, R. F.; Desharnais, R. A.; Cushing, J. M.; Dennis, B. Chaotic Dynamics in an Insect Population. **Science**, vol. 275, jan. 1997.
[5] Alligood, K. T.; Sauer, T. D.; Yorke, J. A. **Chaos:** An introduction to Dynamical Systems. New York: Springer, 1996. 612 p.
[6] Boldrini, J. L. et al. **Álgebra linear.** 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. 411 p.