TEORIA DE GRAFOS E O PROBLEMA DE CONEXÃO DE PESO MÍNIMO

Maria Verônica Bartmeyer (PICME/ OBMEP - CNPq), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática - Álgebra

Palavras-chave: ciclos, caminhos, árvores geradoras, grafos planares, espectro do grafo.

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo detalhado da teoria de grafos, partindo de problemas históricos, bem conhecidos e famosos, o estudo de seus principais conceitos, propriedades e resultados [1]. Também foi nosso foco as diversas aplicações desta Teoria [2, 3, 4, 5] e de alguns algoritmos, visando compreender como estes últimos são usados para resolução do problemas de conexão de peso mínimo, de menor caminho, influências numa família e classificação de participantes em um torneio. Em particular, aplicamos a teoria de grafos para resolução de problemas relacionados ao conceito de árvore (grafo conexo e acíclico), resolução do problema de conexão de peso mínimo. Finalizamos o trabalho com um estudo introdutório de algo bastante recente em Teoria de Grafos, que é a Teoria Espectral de Grafos [2, 6, 7, 8].

Introdução

A Teoria de Grafos teve sua origem no século XVIII, quando o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) resolveu o famoso problema das pontes de Köenigsberg. Desde então, a teoria desenvolveu-se amplamente, possuindo aplicações em diversas áreas como a Química, a Economia, a Biologia, a Física e em áreas específicas da Matemática, como na Álgebra Linear e na Teoria dos Jogos.

Considerando que diversas cidades de um país devem ser ligadas por estradas. Dadas várias possibilidades de conectar as cidades e os custos envolvidos, qual é a maneira mais econômica de colocar estradas para que, na rede rodoviária resultante, duas cidades estejam conectadas por uma cadeia de estradas?

Problemas semelhantes envolvem a construção de redes ferroviárias e transportes de linha de água e são conhecidos na teoria de grafos como problemas de conexão de peso mínimo.

Uma aplicação prática da teoria de grafos para resolução do problema de conexão de peso mínimo é o uso do grafo conexo e acíclico (árvore) e o Algoritmo de Prim.

Materiais e Métodos

Estudo do material disponibilizado pelo orientador, de forma individual e também com o outro participante do projeto. Encontros semanais, com o professor orientador para apresentação de seminários ou discussão dos tópicos e aprofundamento dos temas estudados. As atividades foram divididas nas seguintes etapas: 1) estudo da teoria dos grafos simples (definições, propriedades e teoremas), resolução de exercícios e demonstrações na referência [1]; 2) pesquisa por aplicações da Teoria dos Grafos, principalmente nas referências [2], [3], [4] e [5]; 3) apresentação e discussão com o orientador sobre as aplicações de cada tipo de grafo estudado.

Resultados e Discussão

Grafo é portanto um par **G(V,E)**, onde V é um conjunto finito e E é um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Os elementos de V são chamados **vértices** do grafo G, e os elementos de E são as **arestas** do grafo [1].

Sejam os grafos G e H. Dizemos que g é um subgrafo de H desde que V(G) esteja contido em V(H) e, E(G) esteja contido em E(H). Se V(G) = V(H), então G é um **subgrafo gerador**.

Dizemos que dois vértices são adjacentes se há uma mesma aresta incidente a ambos e os chamamos de vértices **vizinhos**. O número de vizinhos de um vértice é denominado **grau** do vértice.

Dentre os tipos de grafos, destacamos aqui os seguintes:
Passeio num grafo é uma sequência de vértices, em que cada vértice é adjacente ao seguinte e **caminho** é passeio em que nenhum vértice é repetido.

Quando cada par de vértices no grafo está ligado por um caminho, o grafo é chamado **conexo.**

Um **ciclo** é um passeio de comprimento mínimo três, em que o primeiro e o último vértices coincidem, mas nenhum outro vértice é repetido. Já uma **árvore** é um grafo conexo, sem ciclos.

Árvore geradora de G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore.

Como resultado do estudo da teoria de grafos apresento a resolução do problema enunciado anteriormente.

Seja G um gráfico construído com o conjunto de cidades como seu conjunto de vértices. Cada aresta de G corresponde a uma ligação rodoviária entre duas cidades. O custo de construir uma ligação rodoviária é o peso da sua aresta correspondente. Então, uma árvore geradora de peso mínimo de G fornece a configuração mais econômica para a rede rodoviária. A seguir, um algoritmo que nos fornece árvore geradora de custo mínimo de um grafo G.

Algoritmo de Prim [5]**:**
Seja G um grafo simples, conexo e valorado com n vértices. Sejam v_1; v_2; ... ; v_n os vértices de G e seja W = W(G) = (w_{ij}) a matriz de peso de G.
Ou seja, W é a matriz nxn com
(i) $w_{ij} = \infty$, para $1 \leq i \leq n$,
(ii) $w_{ij} = w_{ji}$ = o peso da aresta (v_i, v_j) se v_i e v_j são adjacentes,
(iii) $w_{ij} = w_{ji} = \infty$ se v_i e v_j não são adjacentes.

O algoritmo constrói uma árvore geradora de custo mínimo.
Passo 1: comece com v_1. Conecte v_1 a v_k, onde v_k é um vértice mais próximo para v_1 (v_k é mais próximo de v_1 se (v_1, v_k) for uma aresta com o menor peso possível). O vértice v_k pode ser facilmente determinado observando a matriz W. Na verdade, v_k é o vértice correspondente ao qual a entrada na linha 1 de W é mínima.
Passo 2: Tendo escolhido v_k, seja v_i diferente de v_1 ou v_k, um vértice correspondente a menor entrada nas linhas 1 e k juntas. Então v_i é o vértice "mais próximo" da aresta do subgrafo definido pela aresta (v_1, v_k). Conecte v_i a v_1 ou v_k, se a entrada está na primeira linha ou na k-ésima linha, respectivamente. Suponha que seja, digamos, na k-ésima linha; então é a (k, i)-ésima entrada de W.
Passo 3: Considere o subgrafo definido pelo conjunto de arestas {v_1v_k, v_kv_i}. Determinar o vizinho mais próximo do conjunto de vértices {v_1v_k, v_kv_i}.
Passo 4: Continue o processo até que todos os n vértices tenham sido conectados por (n - 1) arestas. Isso resulta em uma árvore geradora de custo mínimo.

Teoria Espectral de Grafos

Para exemplificar uma aplicação da teoria espectral de grafos, observamos que é possível encontrar o espectro e a energia (conceitos cuja origem vem da química) de um grafo circulante, por meio do cálculo dos autovalores do grafo, obtidos a partir das raízes do polinômio característico da sua matriz de adjacência.

Seja um grafo **G** de ordem n e conjunto de vértices V = {v_1, ... , v_n}. A matriz adjacência de **G** é a matriz **A** = { a_{ij} } de ordem nxn, dada por:

(i) a_{ij} = 1, se v_i é adjacente a v_j ;
(ii) a_{ij} = 0, caso contrário.

O polinômio característico de **G** é o polinômio característico da matriz adjacência de **G**, e denotado por $p_G(\lambda)$. Entre os grafos circulantes, calculamos a energia do grafo completo K_n.

O grafo completo, cuja primeira linha da matriz adjacência é dada por **L = (0 1 1 ... 1)**, e as outras linhas são as permutações da primeira, possui polinômio característico $pG(\lambda) = \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + ... + \lambda^{n-1}$. Quando $\lambda = 1$, então $pG(\lambda) = n - 1$, e quando λ é diferente de 1, $pG(\lambda) = -1$.

Se λ_1, λ_2, ..., λ_s são os autovalores distintos de **G,** com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_s$ e m_1, m_2, ..., m_s, suas respectivas multiplicidades, o espectro **Sp(G)** do grafo será a matriz de ordem 2xs cuja primeira linha é composta pelos autovalores e a segunda por suas multiplicidades.

A energia de **G** será a soma do valor absoluto de seus autovalores.

Conclusões

O estudo da teoria dos grafos possibilita integração com outras áreas do conhecimento e entre subáreas da própria matemática, com possibilidade de aprofundamento e desafios (problemas abertos) ainda a resolver. Além disso, o estudo contribuiu para o aprimoramento na elaboração e defesa de argumentos lógicos, através da redação de provas e demonstrações e proporcionou a compreensão do processo indutivo e funcionamento de algoritmos, assim como o desenvolvimento da criatividade para utilização métodos matemáticos na resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento.

Agradecimentos

À Universidade Estadual de Ponta Grossa. Ao orientador do projeto, Prof. Dr. Marciano Pereira e ao colega de iniciação científica. Ao PICME/CNPq pela bolsa.

Referências

[1] Scheinerman, E. R. Matemática Discreta - Uma introdução. Rio de Janeiro: Cengage Learning, 2011. 561 p.
[2] Howard, A. e Rorres, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 572 p.
[3] Jurkiewicz, S. Grafos – Uma Introdução. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2009. 111p.
[4] Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. Ghaph Theory with Applications. Nova Iorque: North-Holland, 1982. 264 p.
[5] Balakrishnan, R. e Ranganathan, K. A Textbook of Graph Theory. 2ª Ed. Nova Iorque: Springer, 2012. 292 p.
[6] Abreu, N.; Del-Vecchio, R.; Trevisan, V.; Vinagre, C. Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução. Florianópolis: 3º Colóquio de Matemática da Região Sul (Minicurso), 2014.
[7] BOAVENTURA NETTO, P. O. Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. 2 ed, Edgard Blücher (1996). 249 p.
[8] WILSON, R. Introduction to Graph Theory. 4ª Ed. Addison Wesley, 1996. 171 p.
[9] WEST, D. Introduction to Graph Theory. 2ª Ed. Índia: Pearson Education Inc, 1996. 512 p.
[10] ZHANG, F. Matrix Theory - Basic Results and Techniques. 2ª Ed. Nova Iorque: Springer, 2011. 399 p.
[11] CAVALCANTI, A. S. Matrizes Circulantes: Aplicação na Resolução de Equações Polinomiais. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 2016.