Teoria das funções representadas por integrais

Luiz Eduardo de Matos (PIBIC/Fundação Araucária/UEPG), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra- Matemática- Análise.

Palavras-chaves: funções definidas por integrais, função Gama, método de Laplace, formula de Stirling

Resumo:
Existem muitos problemas em análise nos quais encontramos integrais impróprias dependendo de um parâmetro. Se uma tal integral é convergente, ela define uma função de um parâmetro. Este Trabalho teve como foco principal estudar as funções definidas por integrais, onde buscamos analisar sob quais condições estas funções estão bem definidas, são contínuas, diferenciáveis e integráveis. Além disso, estudamos detalhadamente tipos especiais destas funções, como, por exemplo, a importante função Gama, que generaliza o conceito de fatorial, e suas respectivas propriedades. Também estudamos algumas de suas aplicações, como o método de Laplace e a fórmula de Stirling.

Introdução:

Em um primeiro curso de análise busca-se estudar de forma aprofundada e rigorosa conceitos e aspectos sobre funções já vistas em cálculo, como, por exemplo continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade. Mas as funções utilizadas neste processo, são as que podem ser expressas de forma simples, sem muitos recursos, as chamadas funções elementares.

Por outro lado, em muitos problemas de análise aparecem outros tipos de funções, tais que para expressá-las é necessário recursos mais sofisticados, como as séries ou as funções representadas por integrais. Este último é o caso que estudamos no presente trabalho. Um exemplo simples deste tipo de função é a função Logarítmica, a qual pode ser definida por

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,, x > 0.$$

Ao ver este tipo de função é natural se perguntar se elas estão bem definidas e se são: contínuas? diferenciáveis?integráveis?

Como um tipo geral do problema acima, suponha que

$$\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$$

é convergente para cada valor de x em algum intervalo. Na prática é importante saber se Φ é ou não contínua; também, sob que condições é possível trabalhar com diferenciação e integração de Φ, etc. O tratamento dessas questões é bastante análogo ao tratamento das correspondentes questões no caso de funções definidas por séries; o conceito chave para isso é o de convergência uniforme.

Para responder a estas questões necessita-se de um estudo aprofundado e de certos resultados de convergência (uniforme) de integrais. Além disso, funções

importantes da matemática, como são os casos das funções Gama e Beta, são exemplos destes tipos especiais de funções, as quais aparecem em diversas aplicações.

Material e Métodos

Os materiais utilizados foram livros, artigos e pesquisa na internet. O projeto foi desenvolvido por meio de estudos individuais na literatura e com encontros semanais, de duas horas, para apresentação de seminários, discussão de resultados e dúvidas dos conteúdos estudados.

Resultados e Discussão:

Este trabalho foi dividido em três partes. Primeiro, fizemos um estudo dos pré-requisitos de análise. Segundo, estudamos as funções definidas por integrais, propriamente ditas, de um ponto de vista geral, bem como de suas propriedades. Terceiro e último, estudamos certos tipos especiais de funções definidas por integrais e aplicações.

Assim, iniciamos o trabalho com uma breve revisão de análise para que assim ao adentrarmos nos conceitos e definições de uma função definida por integral tivéssemos maior facilidade em compreendê-los. Em seguida, ao começarmos o estudo deste tipo de função percebemos que o tempo gasto na revisão foi de grande importância, pois para definir se uma função deste tipo é contínua, diferenciável e integrável, era suficiente verificar isto para a função que estava a ser integrada para lhe dar origem, isto é garantido pelos seguintes teoremas:

Teorema 1: Se F é continua em $R:\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$, então f definida em $I:\{a \leq x \leq b\}$ por $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)\,dy$ é continua.

Teorema 2: Seja F e $\frac{\partial F}{\partial x}$ ambas continuas em $R:\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$. Então f dada por $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)\,dy$ é diferenciavel em $I:\{a \leq x \leq b\}$.

Além disso, estudamosos casos onde os limites de integração não eram finitos e, portanto, a integral só define uma função se garantirmos a sua convergência. Assim, foi necessário estudar métodos para verificar a convergência da integral, muitos deles análogos aos critérios para convergência de séries, como, por exemplo, o teste da comparação e o de Wierstrass (ou M-test), para verificar a convergência uniforme, um dos conceitos fundamentais neste estudo.

Teorema 3 (M-test): Suponha que F é definida em $R:\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$, com β podendo ser finito ou infinito; e suponha que $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)\,dy$ converge para cada x em $I:\{a \leq x \leq b\}$. Assim se existe uma função M em $\{\alpha \leq y \leq \beta\}$ para o qual $|F(x,y)| \leq M(y)$ e $\int_{\alpha}^{\beta} M(y)\,dy$ converge. Então $\int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)\,dy$ converge uniformemente para todo x em I.

Além deste, foram estudas outros critérios para garantir convergência uniforme da integral, entre eles estão o Critério de Cauchy, o qual dá uma caracterização da convergência uniforme da integral, e também os testes de Abel e de Dirichlet modificados, os quais não encunciaremos por terem um enunciado extenso.

Ressaltamos que foi muito importante fazer este estudo, pois a convergência uniforme de funções definidas por integrais nos garante a sua continuidade, como mostra o teorema que enunciaremos a seguir:

Teorema 4: Seja F contínua em $R:\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$, onde β pode ser finito ou infinito, mas nos assumiremos que β é um ponto singular de F. E suponha que f é definida em $I:\{a \leq x \leq b\}$ por $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)\,dy$ onde a integral converge uniformemente. Então f é continua.

Observamos que temos resultados análogos a este que garantem a diferenciabilidade e a integrabilidade da função definida pela integral.

Após o estudo geral das funções definidas por integrais, sua convergência e propriedades, passamos ao estudo de algumas funções especiais, em particular.

A principal foi a função Gama, cuja primeira aparição foi em uma carta de Leonhard Euler para Golbach em 1729. Esta função foi desenvolvida na busca por generalizar a noção de fatorial para números reais e muitas vezes é citada como a segunda integral de Euler em vez de função Gama [4, 5]. Algumas de suas aplicações estão em estatística, na parte de densidade de probabilidade, também aparece como solução de equações diferenciais, entre outras. Contudo, o nosso estudo se baseou em suas propriedades e resultados analíticos.

A função Gama é definida por uma integral dependendo de um parâmetro e é dada por $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} [e^{-t}t^{x-1}dt]\ , x > 0$.

Foram enunciados e demonstrados diversas propriedades e resultados sobre a função Gama, entre eles citamos:

Teorema 5:A função Γ é continua e infinitamente diferenciável em $x > 0$.

Uma breve ideia da demonstração será dada a seguir:

Primeiro seja y um numero arbitrário em $\{x > 0\}$. Daí escolhemos a e b tal que $0 < a < y < b$. Em seguida analisamos Γ em $I:\{a \leq x \leq b\}$. Em seguida definimos $\Gamma\,1$ e $\Gamma\,2$ de forma que a soma delas de Γ, ou seja, $\Gamma\,1(x) = \int_0^1 \left[e^{-t}t^{(x-1)}\right]dx$ e $\Gamma\,2(x) = \int_1^{\infty} \left[e^{-t}t^{(x-1)}\right]dx$. Assim aplicando o teorema 3 e o teorema 4 segue que Γ é continua para todo x, pois y foi escolhido arbitrariamente.

Propriedades:

1) Para todo $a > 0, \int_0^{\infty} e^{-at}t^{x-1}dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x}$
2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x > 0$
3) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\ldots(x+1)x\Gamma(x)$, para todo $n \geq 1$ inteiro e $x > 0$
4) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

As demonstrações destas propriedades podem ser encontradas em [1].

Outra função especial e bastante importante, definida por uma integral, é a Função Beta (ou Primeira integral de Euler), a qual fizemos um estudo detalhado. Esta função tem relação com a função Gama, como mostramos a seguir:

Definição: A Função Beta é dada por $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

Teorema 6:A função Beta$B(x,y)$ é continua em $\{x > 0, y > 0\}$.

Propriedades:

1) $B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y) \Big/ \Gamma(x+y)$
2) $B(x,y) = B(y,x)$
3) $B(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}]\,d\theta$

Em seguida ao terminar os estudos destas funções, foi estudado o método de Laplace. Este método leva este nome em homenagem ao matemático francês Pierre-

Simon Laplace, que foi quem o desenvolveu, e serve para estimar o valor assintótico de funções dependendo de um parâmetro sob certas condições.

Teorema 7 (Método de Laplace): Suponha que

i) f é de classe C^2 em $\{0 \leq t \leq a\}$, onde a pode ser finito ou infinito.
ii) f é crescente
iii) $f(0) = f'(0), f''(0) > 0$
iv) Existe x', para o qual $I(x) = \int_0^a e^{-xf(t)}\,dt$ existe

Então $I(x)$ existe para todo $x > x'$, e $I(x) \sim \left[\frac{\pi}{2xf''(0)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Exemplo 2:

Mostre que se $a > 0, b > 0$, e f é definida por $f(x) = \int_0^a e^{-xbt^2}dt$, então: $f(x) \sim \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{bx}\right]^{\frac{1}{2}}$.
De fato, pois $g(t) = t^2$ atende as condições do método de Laplace.

Aplicação do método de Laplace:

Ao aplicarmos o método de Laplace na função Gama, obtemos o seu comportamento assintótico e, além disso, este resultado ganha um nome em particular de formula de Stirling.

A formula de Stirling nos diz que $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{(2\pi)}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$, quando $x \to \infty$, e assim obtemos uma aproximação do "tamanho" de $n!$, quando n é grande.

Conclusões:

Com este trabalho percebeu-se que as funções definidas por integrais são uma forma alternativa para definir funções, muito útil e que estas têm um papel importante na matemática, uma vez que funções como a função Gama e a Beta aparecem em diversas aplicações. Além delas, temos também as transformadas, que são uma ferramenta importante para resolver equações diferenciais. Ou seja, conhecer esta teoria, bem como suas propriedades, é de fundamental importância não só em matemática, como na física e na engenharia. Reconhecemos que o conceito de convergência uniforme foi de extrema importância ao longo deste estudo.

Agradecimentos: Ao meu orientador e à Fundação Araucária.

Referências:

[1] FULKS, W. **Advanced Calculus**. Nova Yorque: John Wiley & Sons, 1969.
[2] TAYLOR, A. E.; MANN, W. R. **Advanced Calculus**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1983.
[3] PROTTER, M. H.; MORREY, C. B. **A First Course in Real Analysis**.Novalorque: Springer-Verlag, 2000.
[4] ARTIN,E. , **Einffuhrung in die Theorie der Gamma funktion**,1931
[5] DAVIS, P. J. **Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function: In Memoriam: Milton Abramowitz**. The American Mathematical Monthly, Vol. 66, No. 10 ,1959, p. 849-869.
[6] RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. 3 ed. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1976.
[7] DE FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.