INTRODUÇÃO A TEORIA DOS GRAFOS

Lucas Matheus Sandeski (PICME/CNPq/UEPG), Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra - Matemática

Palavras-chave: teoria dos grafos, otimização, espectro de um grafo, aplicação, menor caminho.

Resumo

O presente trabalho teve por objetivo realizar um estudo detalhado da teoria de grafos, com o estudo de seus principais conceitos, como, por exemplo, passeio e caminho, árvores, grafos eulerianos, coloração, bipartição, grafo planar, etc, suas propriedades e resultados, bem como de diversas aplicações e de alguns algoritmos. Entre as aplicações destacamos as principais: o problema do conector, o problema do menor caminho, problema do carteiro chinês, problema do caixeiro viajante. Finalizamos o trabalho com um estudo introdutório de algo bastante recente em Teoria de Grafos, a Teoria Espectral de Grafos.

Introdução

Muitas situações podem ser convenientemente descritas através de diagramas que consistem de um conjunto de pontos, juntamente com linhas que ligam alguns desses pares de pontos. Por exemplo, os pontos podem representar pessoas, as linhas ligam pares de amigos; os pontos podem representar centros de comunicações, as linhas ligações entre os centros. A abstração matemática de situações desse tipo é feita via o conceito de grafo.

A teoria dos grafos se originou a partir do problema das Pontes de Königsberg, resolvido pelo matemático suíço Leonhard Euler, na primeira metade do século XVIII. Este foi o primeiro a escrever um artigo relacionado a grafos.

Atualmente a teoria dos grafos tem diversas aplicações nas mais variadas áreas, como, por exemplo, na química, na informática, na modelagem e na otimização.

Materiais e Métodos

Ele foi desenvolvido em colaboração Maria Verônica Bartmeyer, graduanda em licenciatura a matemática na UEPG, com a orientação do professor Marciano Pereira. A pesquisa foi desenvolvia em um pouco mais de um ano. Com um encontro semanal de duas horas. Nos encontros debatíamos o que havia sido estudado na semana que se sucedeu, e combinávamos o que deveria ser estudado

para a semana seguinte. Inicialmente seguimos a referência [1], mas logo passamos a utilizar diversas referências simultaneamente.

Resultados e Discussão

Um grafo é um conjunto de um par $G = (V, E)$, em que V é um conjunto finito, não-vazio, de elementos e E é um conjunto de dois elementos, subconjuntos de V. Os elementos de V são chamados de vértices, e os elementos de E são conhecidos como arestas.

Os vértices v e w são ditos adjacentes se $(v, w) \in E$. E um caminho é definido na teoria dos grafos como uma lista de vértices adjacentes.

Em determinados grafos associamos às arestas um número não negativo $P(e)$, chamado de peso da aresta e.

A matriz de adjacência do grafo G com vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ é a matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$, em que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ v_i\ é\ adjacente\ a\ v_j\ em\ G \\ 0, & nos\ outros\ casos \end{cases}$$

Entre as diversas aplicações ou problemas estudados destacamos como mais notáveis os seguintes: as Pontes de Königsberg, conexão de 3 serviços a 3 casas, a coloração de mapas, o Caixeiro Viajante, a menor distância (peso) entre dois vértices, a conexão de todos os vértices com um menor peso, a planaridade de grafos. Sendo que o processo de resolução de todos esses problemas pode ser adaptado para resolver problemas similares.

Problemas em que se quer conectar todos os vértices, com um peso mínimo, sendo que o peso pode ser tempo, custo, quantidade de material, distância, etc, podem ser resolvidos pelos algoritmos de Kruskal ou de Prim, de forma ótima. Entretanto, problemas de menor caminho, que consistem em achar o caminho de peso mínimo entre dois vértices, podem ser resolvidos com o auxílio do algoritmo de Dykstra, de forma ótima.

Um exemplo deste último problema é como segue: Suponha que um caminhoneiro deseja fazer uma entrega, na cidade de Cascavel, saindo de Curitiba, de modo que leve o menor tempo possível. Porém, as estradas possuem limites de velocidade, inclinação, qualidade do asfalto e quantidade de curvas diferentes, de modo que a distância não é o único fator a ser considerado. O tempo estimado em minutos de viajem entre as cidades está simplificado pelo grafo na Figura 1 abaixo.

Este problema pode ser resolvido com o algoritmo de Dijkstra, o qual passamos a descrever:
Deixe que os vértices (cidades) sejam nomeados como $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$; deixe que s e t sejam vértices específicos, respectivamente o vértice inicial (Curitiba) e o vértice final (Cascavel); e deixe P ser a matriz peso do grafo. O algoritmo de Dijkstra aloca pesos aos vértices de G. A cada estágio do algoritmo, alguns vértices têm peso permanente e outros tem peso temporário.
Para começar, o vértice s tem peso permanente 0 alocado, e todos os outros vértices tem peso ∞ alocado. A cada inteiração um novo vértice terá um peso permanente alocado seguindo as seguintes regras:

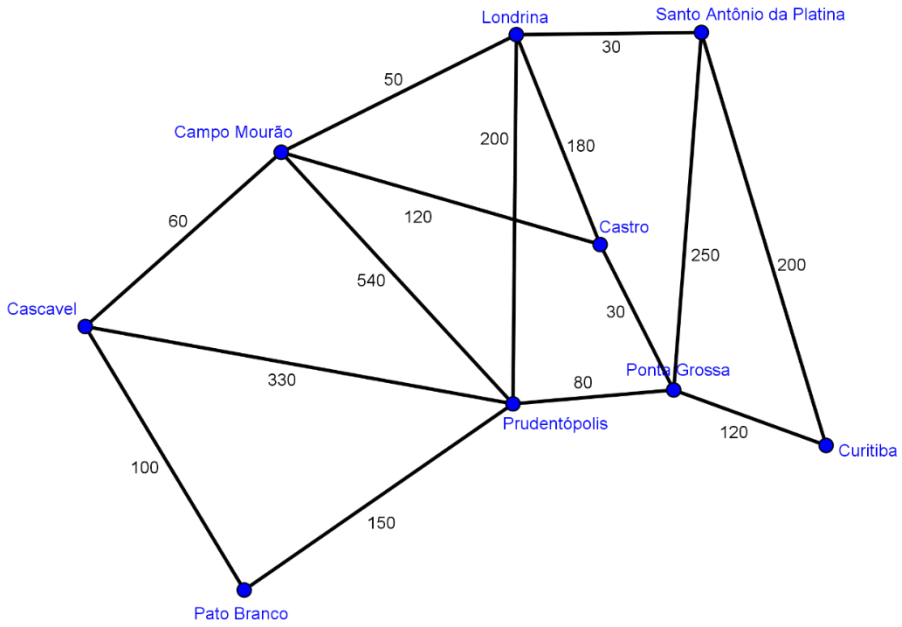


Figura 1: grafo simplificando o tempo para percorrer as rotas possíveis do exemplo.

Regra 1: Se v_j é um vértice que ainda não foi alocado um peso permanente, determine para cada vértice v_i que já tenha sido alocado um vértice permanente,

$$\alpha_{ij} = \text{Min}\{\text{velho peso de } v_j, (\text{velho peso de } v_i) + w_{ij}\}.$$

Deixe $w_j = \text{Min}_i\, \alpha_{ij}$ é um novo peso temporário de v_j não excedendo o peso temporário anterior.

Regra 2: Determine o menor entre os w_j's. Se esse menor peso está em v_k, w_k se torna o peso permanente de v_k. Em caso de ter um empate quaisquer dos vértices é pegado para se alocar um peso permanente.

O algoritmo parará quando o vértice t, receber um peso permanente.

Finalizando, a Teoria Espectral de Grafos vem sendo estudada com o intuito de descrever propriedades estruturais do grafo, a partir de seu espectro, o que tem origem na química. Essa área tem tido muito interesse ultimamente, evidenciado pela grande quantidade de publicações na área nos últimos anos.

O polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$, ou seja, $det(\lambda I - A(G))$, é denominado polinômio característico de G; λ é dito um autovalor do grafo G quando λ é uma raiz do polinômio característico de G. Se $A(G)$ possui s autovalores distintos $\lambda_1 > \ldots > \lambda_s$ com multiplicidades iguais a $m(\lambda_1), \ldots, m(\lambda_s)$, respectivamente. O espectro do grafo G, denotado $spect(G)$, é definido como a matriz $2 \times s$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja, escrevemos

$$spect(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & \ldots & m(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

O maior autovalor de G é denominado índice de G.

Calculamos o espectro de um grafo completo e de um ciclo. E por fim, a energia de um grafo é definida como a soma dos valores absolutos dos autovalores do grafo. Então se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores do grafo G de ordem n, a energia $\varepsilon(G)$ de G é dada por:

$$\varepsilon(G) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|.$$

Conclusões

Após esse tempo tenho um conhecimento matemático muito maior do que tinha no início desse projeto. Tenho uma noção muito boa da teoria dos grafos e aplicações e percebo sua importância na matemática, bem como em áreas afins, na modelagem de problemas e suas soluções, via algoritmos extremamente eficientes.

Agradecimentos

Agradeço a meus pais, a esta universidade, e seu corpo docente, ao CNPq. Ainda agradeço de forma especial ao meu orientador Marciano Pereira e a minha colega de pesquisa Maria Verônica Bartmeyer.

Referências

[1] Scheinerman, E. R. Matemática Discreta - Uma introdução. Rio de Janeiro: Cengage
[2] Balakrishnan, R.; Ranganathan, K. A textbook of Graph Theory. Nova Iorque: Springer-Universitex, 2012.
[3] Jurkiewicz, S. Grafos - Uma Introdução. Apostila 5 do PIC - OBMEP. Rio de Janeiro: SBM, 2009.
[4] Abreu, N.; Del-Vecchio, R.; Trevisan, V.; Vinagre, C. Teoria Espectral de Grafos – Uma Introdução. Florianópolis: 3º Colóquio de Matemática da Região Sul (Minicurso), 2014.