EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA QUÂNTICA E DISSIPAÇÃO

Dara Marin (BIC/Fundação Araucária/UEPG), Antonio Sergio Magalhães de Castro (Orientadora), e-mail: pasmcastro@gmail.com.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física.

Física, física clássica e física quântica; Mecânica e campos.

Palavras-chave: Excitação paramétrica, Método das Escalas Múltiplas, oscilador harmônico, perturbação.

Resumo

Sistemas físicos descritos por equações diferenciais ordinárias não lineares ou com coeficientes não constantes estão presentes na Física e obter soluções analíticas é uma tarefa importante. Em ótica quântica tais equações são comumente encontradas para a descrição de fenômenos envolvendo processos lineares ou não lineares. A excitação paramétrica no efeito Casimir Dinâmico é um exemplo deste tipo de problema. Neste sentido, um breve estudo sobre osciladores harmônicos clássicos foi realizado, em seguida, discutido o Método das Escalas Múltiplas. Trata-se de uma técnica que transforma equações diferenciais não lineares, em regime de teoria de perturbação, em sistemas de equações diferenciais lineares acopladas. Dessa forma, a solução analítica de sistemas não lineares pode ser encontrada quando o fator perturbativo é muito menor que 1 ($\varepsilon << 1$). O método foi aplicado para obter a solução da equação de Duffing, seguido de uma abordagem numérica da mesma equação, comparando-se a solução analítica obtida através do método das escalas múltiplas com a solução numérica.

Introdução

O efeito Casimir Dinâmico é um fenômeno que consiste na geração de fótons a partir de mudanças abruptas de geometria ou nas propriedades elétricas de alguns materiais em cavidades óticas. Uma explicação qualitativa do fenômeno é dada como a amplificação paramétrica de flutuações quânticas do campo eletromagnético em sistemas com parâmetros dependentes do tempo (DODONOV,2010). A quantização do campo eletromagnético é de crucial importância para o entendimento do efeito Casimir Dinâmico. A quantização trata o campo como uma série de osciladores harmônicos quânticos, de forma que o problema pode ser reduzido ao estudo da solução de osciladores harmônicos perturbados.

Osciladores harmônicos clássicos são sistemas que oscilam em torno de um ponto central de maneira bem comportada (HALLIDAY,2008).

Os casos mais simples e de maior interesse acerca de osciladores harmônicos são: osciladores livres, osciladores amortecidos e osciladores amortecidos forçados.

Considerando-se um oscilador harmônico quântico com frequência variável no tempo (DODONOV,2010) e com pequena amplitude de variação, pode-se tratar tal a correspondente dinâmica quântica, no contexto de teoria de perturbação e aplicar o método das escalas múltiplas (CASTRO,2013; JANOWICZ,2002).

A solução de problemas não lineares clássicos ou quânticos exige que algumas propriedades sejam respeitadas. No regime clássico, a obtenção de termos seculares (termos que divergem no decorrer do tempo) devem ser desconsideradas para se obter soluções não divergentes. Já no regime quântico, estes termos seculares fazem com que a probabilidade não seja conservada, o que entra em contradição direta com os postulados da Mecânica Quântica.

Revisão de literatura

Primeiramente, a literatura foi revisada nos assuntos referentes aos aspectos formais aplicados à solução da dinâmica quântica do Efeito Casimir Dinâmico, com o objetivo de entender como as equações diferenciais são importantes para a solução do mesmo. Devido à quantização do campo eletromagnético recair no estudo de osciladores harmônicos, uma primeira abordagem do problema foi com uma ampla análise sobre osciladores harmônicos no regime clássico.

O método das escalas múltiplas foi amplamente estudado e aplicado à equação de Duffing (NAYFEH,2008). Resultados analíticos, obtidos através do método foram comparados com resultados numéricos obtidos através do Maple 2015. Tal estudo foi o ponto de partida para compreender como tal método pode ser aplicado para obter-se resultados significativos na dinâmica do Efeito Casimir (CASTRO,2013).

Resultados e Discussão

Começando por osciladores harmônicos no regime clássico, os três casos usuais de interesse foram analisados: osciladores livres, osciladores amortecidos e osciladores forçados. O gráfico da posição em função do tempo foi realizada para cada caso:

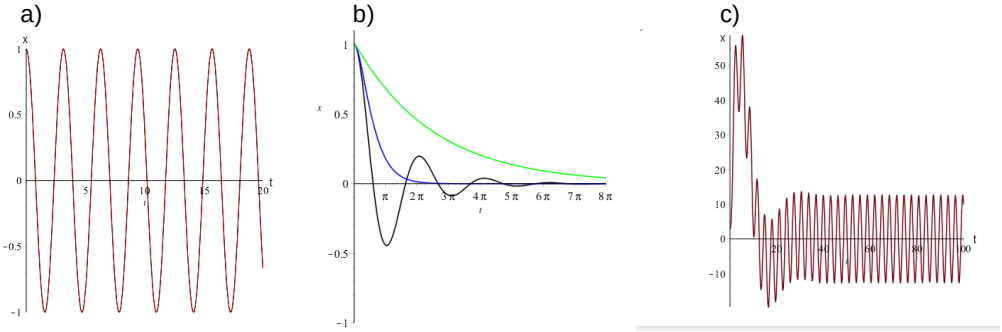


Figura 1 – Gráfico da posição em função do tempo, para o caso de a) um oscilador livre, b) um oscilador amortecido. Em preto movimento subamortecido, em azul criticamente amortecido e em verde sobreamortecido e c) sistema oscilante forçado através de uma força senoidal de impulsão.FONTE: A autora.

No caso de osciladores forçados, pode acontecer o fenômeno da ressonância, que é quando a frequência de impulsão atinge determinado valor que faz com que a amplitude de oscilação cresça indefinidamente. É importante notar o fenômeno da ressonância, pois ele faz com que a energia do sistema aumente indefinidamente e acarreta, para tempos longínquos, um extremo de energia no sistema, levando-o a processo de rupturas. O sistema de interesse é mesoscópico, ou seja, está no limiar entre o regime clássico e o regime quântico.

No caso de um oscilador clássico, as influências do meio podem ser desprezadas sem que haja falhas significativas na solução do sistema. Porém, se o

sistema for tratado num regime semi-clássico, o meio será de fundamental importância na análise do sistema, de forma que o mesmo deverá ser considerado.

Nesse caso, entramos com o Método das Escalas Múltiplas, como forma de obter uma solução analítica para o sistema. Considerando a equação de Duffing, que é uma das equações mais típicas na teoria de perturbação, aplicamos o método com o objetivo de obter solução analítica para o sistema e verificar sua eficácia. A equação de Duffing é dada na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + 4\varepsilon x^3 = 0\,, \qquad (1)$$

Aplicando o método das escalas múltiplas, a variável temporal foi dividida em várias variáveis temporais $t_n = \varepsilon^{n-1}t$, cada uma correspondendo à uma escala de tempo diferente. Por simplicidade, foram utilizadas duas primeiras aproximações das escalas temporais. A primeira solução encontrada possui termos ressonantes (cuja frequência é igual à natural do sistema), que devem ser descartados, pois são soluções falsas, uma vez que não há forças externas, soluções ressonantes vão contra o princípio de conservação da energia. Diante disso, conseguimos escrever a solução geral como

$$x(t) = \cos\left(t + \frac{3}{2}\varepsilon t\right). \qquad (2)$$

A partir dessa solução analítica, encontrada através do método das escalas múltiplas, o gráfico analítico e numérico foi construído. A figura 2 mostra em a) o gráfico analítico, para a posição em função do tempo para dois valores de ε distintos e em b) o gráfico com os valores numéricos.

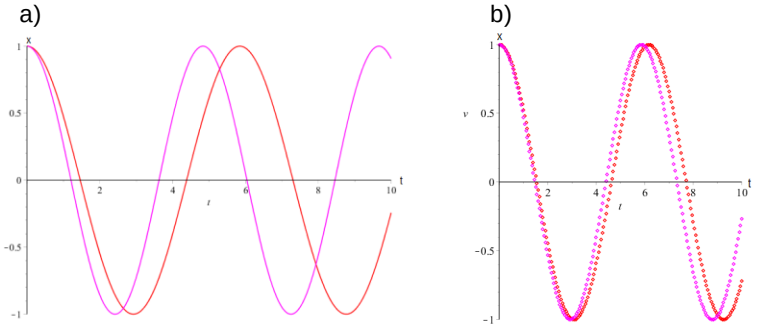


Figura 2 - Gráfico da posição pelo tempo da equação de Duffing para $\varepsilon = 0.05$ em vermelho e $\varepsilon = 0.20$ em magenta. Em a) gráfico analítico, obtido pelo método das escalas múltiplas e em b) gráfico numérico. FONTE: A autora.

Uma comparação dos resultados obtidos analiticamente e numericamente foi realizada para diferentes valores de ε. A comparação é mostrada na figura 3

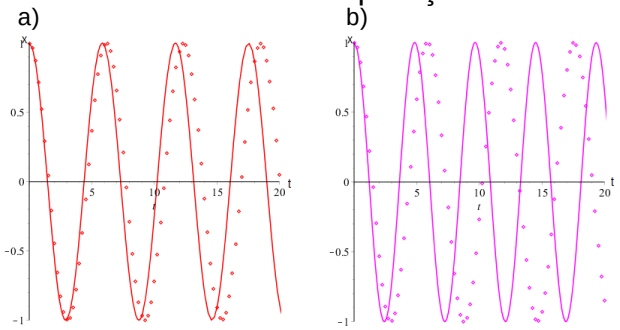


Figura 3 – Resultado numérico (em pontilhado) e analítico em linha cheia para a) $\varepsilon = 0.05$ e b)$\varepsilon = 0.20$. FONTE: A autora.

Analisando a figura 3, é possível observar que o resultado analítico segue junto com o numérico para tempos curtos. Com o decorrer do tempo começa a haver uma discrepância entre os resultados, e o cálculo analítico torna-se pouco preciso.

A influência do valor de ε na correspondência do valor analítico e numérico torna-se evidente. Note-se que na Figura 3, em a, a discrepância entre os resultados começa a atenuar-se em $t \approx 5$, já em b, que possui ε quatro vezes maior, a discrepância já está bem evidente em $t \approx 2{,}5$. Dessa forma, ilustra-se que o Método das Escalas Múltiplas é muito eficaz apenas para pequenas perturbações e intervalos de tempos finitos.

Conclusões

O método das escalas múltiplas, que consiste num método aproximativo, permite que soluções para equações diferenciais perturbadas possam ser encontradas.

O método das Escalas Múltiplas é muito eficaz para a análise de excitações paramétricas tanto em sistemas clássicos e quanto em sistemas quânticos. Porém, resultados satisfatórios só são obtidos quando o fator perturbativo é adequadamente pequeno e intervalos de tempos finitos e curtos são considerados. Para aumentar a precisão em intervalos de tempos maiores, é necessário considerar as equações e a solução em ordens maiores no parâmetro ε, acarretando uma maior complexidade operacional e demanda grande esforço analítico no desenvolvimento da solução do sistema.

Agradecimentos

À Fundação Araucária pelo apoio financeiro. Ao CNPq pelo projeto 453835/14.

Referências

DODONOV, V. V. Current status of the dynamical Casimir effect. **Physica Scripta**, v. 82, n. 3, p. 038105, 2010.

WALKER, Jearl et al. Fundamentos de física. **São Paulo: LTC**, 2008.

DE CASTRO, A. S. M.; CACHEFFO, A.; DODONOV, V. V. Influence of the field-detector coupling strength on the dynamical Casimir effect. **Physical Review A**, v. 87, n. 3, p. 033809, 2013.

JANOWICZ, Maciej. Method of multiple scales in quantum optics. **Physics Reports**, v. 375, n. 5, p. 327-410, 2003.

NAYFEH, Ali H. **Perturbation methods**. John Wiley & Sons, 2008. VOOL, Uri; DEVORET, Michel. Introduction to quantum electromagnetic circuits. **International Journal of Circuit Theory and Applications**, v. 45, n. 7, p. 897-934, 2017.