INTRODUÇÃO AO MÉTODO *MULTIGRID* GEOMÉTRICO

Arnoldo Koehler Neto (PIBIC/Fundação Araucária/UEPG), Fabiane de Oliveira (Orientadora), e-mail: fabiane1910@yahoo.com.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/ Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra: Matemática (10100008) e Análise Numérica (10104020)

Palavras-chave: *Multigrid*. Equações Diferenciais. Parâmetros.

Resumo:

O tema deste projeto é o estudo do Método *Multigrid* Geométrico. Este método é utilizado para acelerar a convergência de sistemas de equações lineares obtidas através da discretização de equações diferenciais. Para isto foi necessário o estudo de alguns pré-requisitos tais como: Métodos iterativos básicos; Modos de Fourier; Método das Diferenças Finitas e Equações Diferenciais Numéricas. Em seguida deu-se início ao estudo do método *Multigrid*. Estudou-se os elementos básicos do método como equação residual, número de níveis, operadores de restrição e prolongação, esquema de correção, *solver*, ciclo V, anisotropia e tipos de engrossamento. Por fim foi feita uma análise dos parâmetros do método e sua influência no tempo computacional, estudo feito com base na literatura existente.

Introdução

O Método *Multigrid* surgiu da necessidade de reduzir o tempo de processamento na obtenção de soluções numéricas para equações diferenciais. Este método foi introduzido por Fedorenko (1964) e aplicado por Bachvalov (1966). Os primeiros resultados práticos foram reportados por Brandt em 1973, considerado pai do *Multigrid*, os quais foram publicados em 1977. Para a resolução dos sistemas lineares oriundos da discretização da equação diferencial foram estudados os seguintes métodos iterativos: Jacobi, Jacobi Ponderado, Gauss- Seidel e Gauss-Seidel *Red-Black*. As primeiras iterações do método de Gauss-Seidel geralmente têm rápida convergência, caracterizando a presença de modos oscilatórios de erro. Porém, após algumas iterações o processo torna-se lento, sinalizando a predominância de modos suaves (BRIGGS, 2000). Neste caso é necessário a procura por métodos mais eficientes que visam melhorar a taxa de convergência dos métodos iterativos. Um método bastante utilizado na literatura é o Método *Multigrid* (BRIGGS et al., 2000) que é o tema principal deste trabalho.

Materiais e métodos

Método Multigrid

O método *Multigrid* tem origem nas propriedades dos métodos iterativos convencionais. Um método iterativo convencional converge rapidamente somente nas primeiras iterações, onde as ondas são oscilatórias. Quando as ondas tornam-se suaves a convergência passa a ser mais lenta. Os componentes de erro de alta

frequência são reduzidos mais rapidamente do que os componentes de erro de baixa frequência. O comportamento do erro do método iterativo pode ser analisado através dos autovalores da matriz de iteração. O ciclo *Multigrid* consiste em fazer com que os modos suaves na malha fina passem a ser oscilatórios na malha grossa acelerando a convergência do processo iterativo.
A seguir são descritos alguns elementos básicos do Método *Multigrid e o* modelo matemático considerado. Por fim é feira a análise dos parâmetros para comparar os métodos utilizados no estudo e sua influência no tempo computacional.

Número de níveis: A ideia do método *Multigrid* é transferir o problema de uma malha mais fina para uma malha mais grossa. Nesta malha o processo de relaxação é repetido até que as componentes de erro tornem-se suaves. Quando isto ocorre o problema é novamente transferido para uma malha mais grossa e assim sucessivamente até chegar à malha mais grossa estabelecida inicialmente ou na malha mais grossa possível. A transferência do problema de uma malha para uma malha mais grossa é chamado de processo de engrossamento sendo a razão de engrossamento mais utilizada na literatura igual a dois.

Operadores de transferência entre malhas: Os operadores de transferência entre malhas são chamados de operadores de restrição e prolongação. O operador de restrição $\left(I_h^{2h}\right)$ transfere informações da malha fina (h) para a malha grossa $(2h)$. Os mais conhecidos são: Injeção, Meia Ponderação e Ponderação completa. O operador mais simples é a restrição por injeção, no qual são injetados os resíduos calculados na malha (h) para a malha $(2h)$. Para o caso unidimensional temos: $v_{2j}^h = v_j^{2h}$. O operador de prolongação $\left(I_{2h}^h\right)$ transfere informações da malha grossa para a malha fina. Utilizando $\left(I_{2h}^h\right)$, interpolamos as correções calculadas na malha $(2h)$ para a malha (h) através de uma média ponderada entre os pontos. Para o caso unidimensional temos: $v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}\left(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}\right), 0 \le j \le \frac{n}{2} - 1.$

Ciclo V: A ordem em que as malhas são visitadas é chamado de ciclo *Multigrid*. Um dos ciclos mais utilizados é o ciclo V. Um algoritmo do Método *Multigrid* para vários níveis de malha pode ser encontrado em Trottenberg et al. (2001).

Anisotropia: A malha pode ser discretizada uniformemente em todas as direções, ou seja, $h_x = h_y$, neste caso tem-se um problema isotrópico. Quando $h_x \neq h_y$ tem-se um problema anisotrópico. A razão h_x / h_y é denominada razão de aspecto. Quanto mais distinta da unidade maior é a anisotropia. As taxas de convergência de problemas anisotrópicos se deterioram com o uso do método *Multigrid* e EP.

Tipos de engrossamento: Oliveira (2010) descreve cinco algoritmos de engrossamento para problemas anisotrópicos propostos na literatura, dos quais destacamos o engrossamento padrão (EP): Realiza o engrossamento simultaneamente em ambas as direções e o Semi-engrossamento seguido de engrossamento padrão (SE-EP): Aplica-se o semi-engrossamento até a que a malha torne-se isotrópica, e a seguir aplica-se o engrossamento padrão.

Modelo matemático e numérico

Neste trabalho estudou-se a equação diferencial definida pela Eq. (1) definida no intervalo [0,1], ou seja, *L* = 1.

$$\frac{dT^2}{dx^2} = 0 \qquad (1)$$

Utilizou-se condições de contorno de Dirichlet dadas por: $T_0 = 0^oC \; e \; T_L = 1^oC$. A amplitude de cada subintervalo na discretização foi denotada por h. Discretizando a Eq. (1) por diferença finita centrada e $h = 0,25$ tem-se o sistema definido pela Eq.(2):

$$\begin{cases} T_1 - 2T_2 + T_3 = 0 \\ T_2 - 2T_3 + T_4 = 0 \\ T_3 - 2T_4 + T_5 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Resultados e Discussão

Resolvendo o sistema linear dado pela Eq. (2), o problema proposto foi programado e resolvido com auxílio do *software Scilab* e do programa *wmáxima* obtendo como solução T_1 = 0°C, T_2 = 0,249878°C, T_3 = 0,499878°C, T_4 = 0,749939°C e T_5 = 1°C.

O sistema dado pela Eq. (2) foi resolvido utilizando os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel considerando um erro na ordem de 0,001. Observou-se que o método iterativo de Gauss-Seidel tem a convergência mais rápida em relação ao método de Jacobi, ou seja, converge com um número menor de iterações.

Análise de Parâmetros

Segundo Trottenberg et al. (2001), experiências com o Método *Multigrid* mostram que as escolhas de parâmetros podem ter uma forte influência na eficiência do algoritmo. Uma simples modificação no algoritmo pode resultar em uma redução significante no tempo computacional. Analisou-se o estudo dos parâmetros do método *Multigrid* realizado por Oliveira (2010).

Oliveira (2010) resolveu numericamente três problemas bidimensionais lineares de condução de calor, governados pelas equações de Laplace (senoidal e linear) e Poisson, todas com condições de contorno de Dirichlet. Utilizou o esquema de aproximação CDS (diferença centrada) e o esquema de correção CS do método *Multigrid* geométrico. Com base nos resultados obtidos obteve-se os seguintes parâmetros ótimos: Algoritmo: Engrossamento Padrão; *Solver*: Gauss Seidel *red-black*; O tipo de restrição não afeta significativamente o tempo de CPU; Iterações internas: ν_{EP} = 2; Número de níveis: $L_{máximo}$.

Oliveira (2010) faz uma comparação entre os métodos *Singlegrid* e *Multigrid* para a equação de Laplace senoidal considerando-se malhas isotrópicas. Verificou-se que o método *Multigrid* é significativamente mais rápido que os métodos Gauss-Seidel e Gauss-Seidel *red-black*. O método *Multigrid* é cerca de sete mil vezes mais rápido para uma malha 513x513 (comparando-se Gauss-Seidel e *Multigrid*).

Foi feita uma comparação entre os algoritmos EP e SE-EP para as razões de aspecto Q = 1/64, 1/16, 1/4, 1, 4, 16 e 64 para as equações de Laplace senoidal em uma malha com 513x513 nós. Verificou-se que, para problemas anisotrópicos o algoritmo SE-EP de Zhang (2002) apresenta o menor tempo de CPU entre os dois algoritmos e para as razões de aspecto testadas.

Conclusões

O método *Multigrid* acelera a convergência dos métodos iterativos, reduzindo desta forma o tempo computacional. Tempo este que depende de alguns parâmetros como iterações internas (*v*), níveis de malha(L), números de nós e *solver*. Foi feito um estudo com base nos trabalhos de Oliveira (2010) para fazer uma análise destes parâmetros e sua influência em problemas isotrópicos. O método *Multigrid* é muito mais rápido que o Gauss-Seidel para problemas isotrópicos.

Agradecimentos

Agradeço a UEPG, ao PIBIC/FUNDAÇÃO ARAUCÁRIA pelo apoio a pesquisa e a professora Fabiane de Oliveira por me orientar e compartilhar seu conhecimento no tema de pesquisa.

Referências

BAKHVALOV, N. S. **On the Convergence of Relaxation Method with Natural Constraints on the Elliptic operator.** URSS Comp. Math. Phys**,** v.1, n.5, 1966.

BRANDT, A., **Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems, Mathematics of Computation**, v. 31, pp. 333-390, 1977.

BRIGGS, W.L.; HENSON, V.E.; MCCORMICK, S.F. **A Multigrid Tutorial**, 2 ed., SIAM, 2000.

FEDORENKO, R. P. **On the Speed of Convergence of an Iteration Process.** USSR. Comput. Math. and Math. Phys, v. 4, n.3, 1964.

OLIVEIRA, F. **Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método Multigrid geométrico**/ Fabiane de Oliveira – Curitiba, 2010.

TROTTENBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHÜLLER, A. **Multigrid**, St Augustin, Germany: Academic Press, 2001.

ZHANG, J. **Multigrid Method and Fourth-Order Compact Scheme for 2D Poisson Equation with Unequal Mesh-Size Discretization.** Journal of Computational Physics, v. 179, pp. 170-179, 2002.