ESTRUTURA DO GRUPO *SL(2,C)* EM SISTEMAS DISCRETOS

Alexandre Drinko (PIBIC/Fundação Araucária/UEPG), Antonio Sérgio Magalhães de Castro (Orientador), e-mail: asmcastro@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Física.

1.05.00.00-6 Física; 1.05.01.02-9 Física Clássica, e Física Quântica; Mecânica e Campos.

Palavras-chave: Grupo *SL(2,C)*, Grupo *SU(2)*, Dinâmica de Spin.

Resumo

Estudo referente à teoria de grupos em mecânica quântica, com enfoque nos grupos *SU(2)* e *SL(2,C)*. O grupo *SU(2)* é analisado pelo método desenvolvido por Messina e Nakazato descrevendo uma forma de gerar Hamiltonianos solúveis dependentes do tempo para uma partícula com *spin1/2*. Analisa-se o grupo *SL(2,C)* e como associá-lo ao *SU(2)*, através de uma transformação métrica no espaço de Hilbert.

Introdução

Grupos e simetrias apresentam-se na física como um conceito fundamental, na abordagem de sistemas clássicos, ou quânticos (informação e computação quântica) [1]. A partir das simetrias uma grande quantidade de informação pode ser adquirida, na simplificação ou descrição algébrica do problema.

Em Mecânica Quântica, se um sistema possui uma dada simetria, então os operadores Hamiltoniano e evolução temporal têm suas formas parametrizadas conhecidas. O grupo *SU(2)* possui as matrizes de Pauli como seus geradores. A forma parametrizada de um elemento deste grupo é dada pela matriz unitária:

$$U_{SU(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1, \qquad (1)$$

(a e b complexos), sendo que (1) deve satisfazer a equação de Schrödinger.

Determinar soluções de sistemas em que o operador Hamiltoniano depende explicitamente do tempo pode trazer grandes complicações do ponto de vista operacional. Deste modo, métodos para gerar hamiltonianos solúveis em *SU(2)* com dependência temporal e com equações diferenciais para o operador de evolução temporal são de grande importância, como o método de Messina e Nakazato [2], que gera classe de operadores Hamiltonianos analiticamente solúveis, com forma específica da estrutura do grupo *SU(2)*,

$$\hat{H}_{SU(2)}(t) = \begin{pmatrix} \Omega(t) & \omega(t) \\ \omega^*(t) & -\Omega(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

onde os elementos $\Omega(t)$ e $\omega(t)$ podem ser interpretados como os campos magnéticos longitudinal e transversal, respectivamente, quando aplicados na descrição da dinâmica de uma partícula de *spin 1/2*, caracterizando o problema de Rabi, possuindo importância significativa no estudo da dinâmica em RNM.

No sentido de estender a compreensão da dinâmica de sistemas discretos para casos mais gerais de simetria dinâmica, explorou-se alguns aspectos algébricos e analíticos referentes ao grupo *SL(2,C)*. De forma geral, um operador Hamiltoniano

com simetria dinâmica *SL(2,C)* pode ser decomposto em duas estruturas da álgebra do *SU(2)*, possuindo sua forma geral segundo (3):

$$U_{SL(2,C)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1, \qquad (3)$$

em que a, b, c e d são complexos. Entretanto esta abordagem pode gerar hamiltonianos não hermitianos [3] (autovalores podem assumir valores complexos), gerando certas dúvidas quanto a sua interpretação, pois na mecânica quântica, observáveis estão associados a operadores com autovalores reais. Assim destacam-se hamiltonianos quasi-hermitianos, que não são hermitianos $\hat{H}(t) \neq \hat{H}^{\dagger}(t)$, porém seus autovalores são reais [4], possibilitando, em certos casos, associá-lo a um hamiltoniano hermitiano com simetria dinâmica *SU(2)* por meio de transformações de métricas no espaço de Hilbert, ($\hat{H}^{\dagger}{}_{nh} = \hat{\Theta}\hat{H}_{nh}\hat{\Theta}^{-1}$) em que o subscrito "$nh$" refere-se ao operador não hermitiano. Para gerar autovalores reais, o operador métrico deve ser positivo.

Revisão de Literatura

Partindo do conceito de simetrias em física, foi realizada uma revisão dos pontos centrais sobre grupos, em especial na estrutura do grupo *SU(2)*. Depois isto foi expandido pelo método de Messina e Nakazato [2], que gera hamiltonianos solúveis em *SU(2)*, para o problema de Rabi, por meio de uma função auxiliar.

Analisando o grupo *SL(2,C)*, foi construído um hamiltoniano não hermitiano [3] dependente do tempo, analisado num referencial girante, removendo a dependência temporal. Assim é possível associar um hamiltoniano hermitiano a este caso, retornando ao *SU(2)*.

Resultados e Discussão

Analisando o caso do sistema *SU(2)* dependente do tempo, o método de Messina e Nakazato, permite determinar soluções analíticas para Hamiltonianos parametrizados na forma (2). O "anzats" utilizado nesta análise consiste em associar ao operador Hamiltoniano uma função auxiliar $X(t)$ complexa, que deve ser zero para $t = 0$. Assim os elementos do operador de evolução temporal tornam-se:

$$a(t) = \frac{\hbar}{(\hbar^2 + |X(t)|^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \Omega(\tau)\mathrm{d}\tau - i\int_0^t \frac{\Im(\dot{X}(\tau)X^*(\tau))}{\hbar^2 + |X(\tau)|^2} d\tau \right), \qquad (4)$$

$$b(t) = \frac{1}{i\hbar} a(t)X(t)\,, \qquad (5)$$

determinados a partir de uma forma estabelecida da função $X(t)$. Para uma escolha da função complexa $X(t)$ e um estado inicial do sistema quântico de interesse, determinando a matriz densidade ρ pode-se estabelecer curvas representativas da evolução dinâmica deste estado quântico do sistema por meio da esfera de Bloch.

$$\hat{U}(t_0, t)|\Psi_0\rangle = |\Psi(t)\rangle\,, \qquad \rho = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|\,. \qquad (6)$$

Sendo assim, pode-se analisar a evolução temporal associada a um caso de *spin 1/2*, no estado inicial de *spin up* sob influência de um campo magnético externo associado a $X(t)$. Fazendo escolhas como $X_1 = \alpha(1 - \cos\mu t)$ e $X_2 = \operatorname{sen}\mu t$, os vetores de Bloch escritos em termos das matrizes de Pauli tornam-se:

$$\vec{r}_1 = \left(\frac{4\cos(\omega_0 t)\operatorname{sen}(\omega_0 t)\,X_1}{1 + X_1^2}, -\frac{2(2\cos^2(\omega_0 t) - 1)X_1}{1 + X_1^2}, -\frac{X_1^2 - 1}{1 + X_1^2} \right) \qquad (7)$$

$$\vec{r}_2 = \left(\frac{4\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)\,X_2}{1+X_2^2}, -\frac{2X_2(2\cos^2(\omega_0 t)-1)}{1+X_2^2}, -\frac{X_2^2-1}{1+X_2^2}\right) \qquad (8)$$

As Figuras 1 (a) ilustram a evolução do vetor de Bloch para $\vec{r}_1$ e 1 (b) para $\vec{r}_2$.

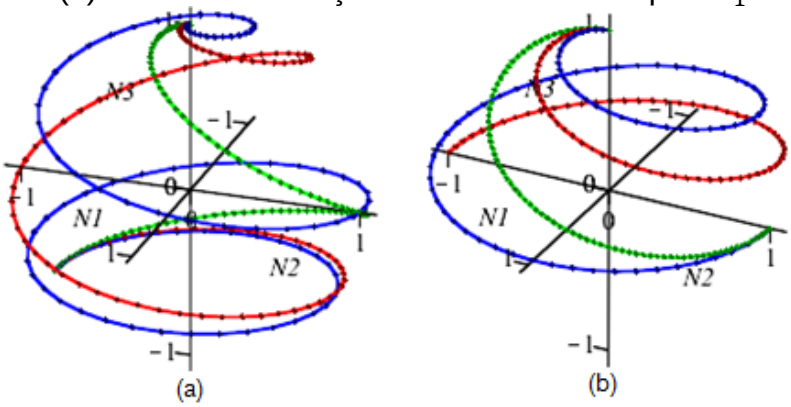


Figura 1: (a) Esfera de Bloch para o vetor $\vec{r_1}$, sendo $\alpha = 1$, $\mu = 1$, $t = [0,\pi]$, e $\omega_0 = 1$ verde, $\omega_0 = 2$, vermelho, $\omega_0 = 3$, azul. (b) Esfera de Bloch para o vetor $\vec{r_2}$, sendo $\mu = 1$, $t = [0,\frac{\pi}{2}]$, e $\omega_0 = 1$ verde, $\omega_0 = 2$, vermelho, $\omega_0 = 3$, azul.

Na Figura 1 (a) observa-se que o *spin* que está no estado de *spin-up*, realiza uma precessão em torno do eixo z e no limite em que $t \to \infty$, tende a um estado de *spin-down*. Na Figura 1 (b), para $t = [0, n\pi]$, para n inteiro, o *spin* parte do estado inicial e termina a evolução no plano formado por $N1$ e $N2$. Caso $t = [0, n\frac{\pi}{2}]$, o *spin* descreve uma precessão em torno do eixo z positivo e retorna ao estado inicial.

Analisando o caso do grupo *SL(2,C)*, construiu-se um operador Hamiltoniano não hermitiano, associado a um operador hermitiano. O operador métrico $\hat{\Theta} = \hat{\eta}^\dagger\hat{\eta}$ pode ser construído utilizando uma base bi-ortogonal,

$$\hat{H}_{nh}|\phi_n\rangle = \epsilon_n|\phi_n\rangle, \qquad \hat{H}_{nh}^\dagger|\chi_n\rangle = \epsilon_n|\chi_n\rangle, \qquad (9)$$

$$\hat{\Theta} = \sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n|, \qquad \hat{\Theta}^{-1} = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|, \qquad (10)$$

seu operador Hamiltoniano hermitiano equivalente $\hat{h}$ é obtido por

$$\hat{\eta}\hat{H}_{nh}\hat{\eta}^{-1} = \hat{h}, \qquad \hat{h}^\dagger = \hat{h}\,. \qquad (11)$$

O exemplo estudado foi de um operador Hamiltoniano com simetria dinâmica *SL(2,C)* descrito em termo das matrizes de Pauli na forma

$$\hat{H}(t) = -\hbar\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z - \hbar\frac{\omega_1}{2}\left(\cos(\omega_{rf}t+\phi)\hat{\sigma}_x - \mathrm{sen}(\omega_{rf}t+\phi)\hat{\sigma}_y\right) - i\hbar\frac{\omega_1\mu}{2}\hat{\sigma}_z\,, \qquad (12)$$

que pode ser analisado do ponto de vista de um referencial girante na mesma radio frequência da precessão do *spin* ($\omega_{rf} = \omega_0$), removendo a dependência temporal:

$$\hat{H}(t) = -\hbar\frac{\omega_1}{2}\left(\cos\phi\;\hat{\sigma}_x - \mathrm{sen}\,\phi\;\hat{\sigma}_y\right) - i\hbar\frac{\omega_1\mu}{2}\hat{\sigma}_z\,. \qquad (13)$$

Conhecendo os autovetores associados ao Hamiltoniano e do seu conjugado hermitiano, pode-se determinar o operador métrico e seu inverso por meio das relações (10). Para o modelo em (13) o operador métrico possui a forma

$$\hat{\Theta} = \hat{\eta}^\dagger\hat{\eta} = \mathbb{I} + \mu\,\mathrm{sen}\,\phi\;\hat{\sigma}_x + \mu\cos\phi\;\hat{\sigma}_y\,. \qquad (14)$$

O operador Hamiltoniano hermitiano correspondente a (13) assume a forma

$$\hat{h} = \hat{\eta}\hat{H}\hat{\eta}^{-1} = \frac{\hbar\omega_1}{2}\sqrt{1-\mu^2}\left(\mathrm{sen}\,\phi\hat{\sigma}_y - \cos\phi\;\hat{\sigma}_x\right). \qquad (15)$$

Nesta abordagem, o operador de evolução temporal torna-se conhecido, possibilitando a descrição da evolução temporal do operador densidade na esfera de Bloch, cujo vetor associado possui a forma (16) com evolução segundo a Figura 2:

$$\vec{r}_3 = (\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\gamma t\omega_1\,, \cos\phi\,\text{sen}\,\gamma t\omega_1\,, \cos\gamma t\omega_1), \qquad \gamma = \sqrt{1-\mu^2}, 0 < \mu < 1. \quad (16)$$

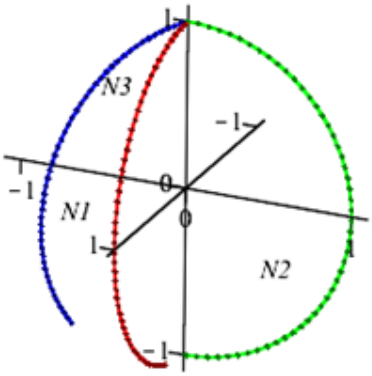


Figura 2: Esfera de Bloch para $\vec{r}_3$, sendo $\omega_1 = 1$, $t = [0, \pi]$. $\phi = 0\ \mu = 0{,}1$ verde, $\phi = \pi/2\ \mu = 0{,}4$ vermelho, $\phi = 2\pi/3\ \mu = 0{,}7$ azul.

Por meio da Figura 2, percebe-se que o fator ϕ altera o "caminho" associado à precessão do *spin*, enquanto o termo μ gera um atraso na "velocidade", pois no mesmo intervalo de tempo, o estado final é diferente devido a este fator.

Conclusões

Com base no estudo apresentado em relação à teoria de grupos e como utilizá-la, diversos aspectos do modelo em análise, como as simetrias associadas ao problema, além da forma da evolução temporal, podem ser determinados através das propriedades pertinentes à estrutura geral do grupo.

Para gerar hamiltonianos solúveis dependentes do tempo em *SU(2)*, o método de Messina e Nakazato, apresenta-se com grande importância, visto que para casos em que o hamiltoniano do sistema depende explicitamente do tempo, determinar o operador de evolução temporal pode ser bastante complicado, consequentemente, determinar como o estado evolui no tempo torna-se não trivial.

Hamiltonianos quasi-hermitianos podem ser associados a hermitianos por meio de transformações métricas no espaço de Hilbert, possibilitando o estudo a dinâmica do sistema *SL(2,C)* no contexto do grupo *SU(2)*.

Agradecimentos

Ao PIBIC-Fundação Araucária pelo apoio financeiro. Ao CNPq projeto 453835/14.

Referências

[1]-NIELSEN, M. A; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. Cambridge: 2000.

[2]-MESSINA, A; NAKAZATO, H. **Analytically solvable Hamiltonians for quantum two-level systems and their dynamics.** Journal Physics A: Math. Theor. v.47, n.445302, 2014.

[3]-SERGI, A; ZLOSHEHASTIEV, K. G. **Non-Hermitian quantum dynamics of a two-level system and models of dissipative environments.** Int. J. Mod. Phys. B, v.27, n.1350163, 2013.

[4]-CROKE, S. ***PT*-symmetric Hamiltonians and their application in quantum information**. Physical Review A, v.91, n.052113, 2015.