ESTUDO DE TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

Paulo Eduardo Lopes da Rosa (PIBIC/PIBIC/CNPq), Fabiano Manoel de Andrade (Orientador), e-mail: fmandrade@uepg.br.
Universidade Estadual de Ponta Grossa/ Departamento de Matemática e Estatística.

Física, Física Geral

Palavras-chave: Informação quântica, Grafos, Qubit.

Resumo

Neste trabalho, motivados pelo avanço tecnológico proporcionado pelo estudo da Física Quântica, pesquisamos o uso de propriedades intrínsecas de certas partículas, como o spin do elétron, para propagar uma certa informação numa rede. Uma das maneiras de se fazer isso, é pela Transferência Perfeita de Estado (TPE) quântico. A TPE baseia-se na aplicação de um operador propagador $U(t) = \exp(iHt)$, sendo H o Hamiltoniano do nosso sistema e t designando um valor de tempo, num certo estado quântico $|\psi(t=0)\rangle$ localizado em um local específico de uma rede, afim de obtê-lo num outro local dessa rede com 100% de fidelidade. O processo pelo qual essa transferência é feita é conhecido como caminhada quântica com tempo contínuo. A dinâmica da caminhada quântica faz com que o estado inicial seja distribuído ao longo da rede após a aplicação do operador, ou seja, que o estado inicial possa ser encontrado com diferentes probabilidades em cada local analisado. No presente estudo a rede é um grafo, e nesse caso o Hamiltoniano do sistema é idêntico à matriz de adjacência A do grafo $G(V,E)$ associado e portanto, $H = A$. Nesse sentido, estudamos diferentes grafos onde a TPE é possível.

Introdução

Neste momento, cientistas do mundo inteiro estão pesquisando maneiras para evoluirmos e acelerarmos cada vez mais o processamento de informação pelos computadores. Quando falamos de computação clássica, a leitura e gravação de informação é feita por combinações de 1 e 0, onde 1 pode representar a passagem de corrente por um terminal, e 0 a não-passagem. A Computação Quântica é inovadora pois utiliza a propriedade quântica de superposição para criar combinações lineares entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, onde $|1\rangle$ pode representar o spin de um elétron para cima, e $|0\rangle$ para baixo (ou seja, diferentes estados quânticos) [1,2]. Portanto podemos ter um estado na forma

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

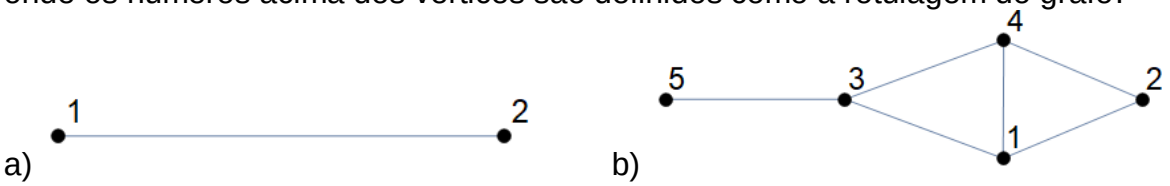
onde $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, e $|\psi\rangle$ é um estado quântico de superposição.

Com isso em mente, utilizamos a Teoria de Grafos [3] para estudar diferentes tipos de grafos que poderiam ser promissores no desenvolvimento de uma “cadeia” [4,5] que permita transferir uma informação (estado quântico) de um local para outro [6,7] (no caso específico de grafos, de um vértice para outro).

Um grafo [3] é descrito por $G(V,E)$, onde V é o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas associadas ao grafo G. Na Figura 1 temos dois exemplos de diferentes grafos com diferentes conexões (um grafo pode ser conectado ou não). Essa conexão, é representada pela sua matriz de adjacência A, onde seus elementos são dados por

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \sim j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Figura 1 – Exemplo de grafo com 2 vértices e **b)** exemplo de grafo com 5 vértices, onde os números acima dos vértices são definidos como a rotulagem do grafo.



onde $i \sim j$ diz que i e j são vértices adjacentes, ou seja, estão conectados. Por exemplo, para um grafo como o representado na Figura 1b) temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

No contexto do estudo de transferência de estados quânticos em grafos [6], os vértices representam estados quânticos e as arestas os acoplamentos entre eles. No nosso caso, estamos interessados numa transferência com 100% de fidelidade [7], ou seja, todo o estado que estava num local é transferido para outro, o que é definido como uma Transferência Perfeita de Estado (TPE). Para realizarmos essa transferência, utilizamos o operador $U(t) = \exp(iAt)$ [6], onde A é a matriz adjacência do grafo de ordem $n \times n$ e n é o número de vértices desse grafo. Portanto, o estado no tempo t é dado por $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$. Essa dinâmica é equivalente a uma caminhada quântica com tempo contínuo (CQTC) [8].

Material e Métodos

Este trabalho baseia-se em estudos e pesquisa teóricos em Mecânica Quântica e Álgebra Linear. Logo como materiais, fizemos uso de literatura predominantemente estrangeira e o software *Mathematica* para realizar certos cálculos.

Resultados e Discussão

Verificamos as transferências de estado quântico para diferentes famílias de grafos, como os grafos caminho P_n; grafos caminho ponderados P_n', onde associamos um valor (peso) com cada aresta do grafo; grafos hipercubos Q_n; Grafos completos K_n; e grafos obtidos através de produtos cartesianos entre grafos destas famílias. Na Figura 2, mostramos alguns dos grafos estudados nesse trabalho.

Obtivemos a TPE para os grafos caminho P_2 ($t = \pi/2$) e P_3 ($t = \pi/\sqrt{2}$). No caso do P_4 e grafos caminho com $n > 3$, não verificamos a TPE, o que já era previsto na literatura e motivou nosso estudo em cima de grafos de diferentes famílias. Para grafos hipercubos [9] (obtidos por produtos cartesianos entre grafos caminhos) conseguimos verificar a TPE em casos de produtos envolvendo apenas $P_2 \times P_2$, $P_3 \times P_3$ (" $\times$ " aqui denotando o produto cartesiano) e $K_n \times P_2$. Em todos os casos citados a TPE é periódica, mas não vimos essa transferência para produtos entre P_2 e P_3 para nenhum valor de t. Por fim, obtivemos a TPE em grafos .

Para obter um grafo Caminho Ponderado [10], alteramos os valores de A_{ij} na sua matriz de adjacência associada, de modo que $J_i = \sqrt{i(n-i)}$, onde J_i são os novos valores, n o número total de vértices e i o vértice de menor rotulagem com adjacência a ser analisada. Por exemplo, para o P_4' temos

$$A_{P_4'} = \begin{bmatrix} 0 & J_1 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & J_3 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Verificamos a TPE para P' com até 7 vértices e produtos cartesianos entre esses grafos e o caminho P_2. Logo abaixo, temos nas Figuras 2 e 3, exemplos de alguns grafos que estudamos, sendo eles os grafos linha P_2 e P_4, hipercubo Q_4 e $P_3 \times P_3 \times P_3$, seguidos de gráficos da Probabilidade em função do tempo. Observamos que a TPE acontece para P_2 no tempo $t = \pi/2$ e é periódica. O mesmo não é observado para P_4 para nenhum tempo. Observamos também a TPE em Q_4 e $P_3 \times P_3 \times P_3$ para $t = \pi/2$ e $t = \pi/\sqrt{2}$, respectivamente.

Figura 2 – De cima para baixo, grafos caminho P_2 e P_4 e em seguida grafo hipercubo $Q_4 = P_2 \times P_2 \times P_2 \times P_2$ (esquerda), e grafo resultante de $P_3 \times P_3 \times P_3$ (direita).

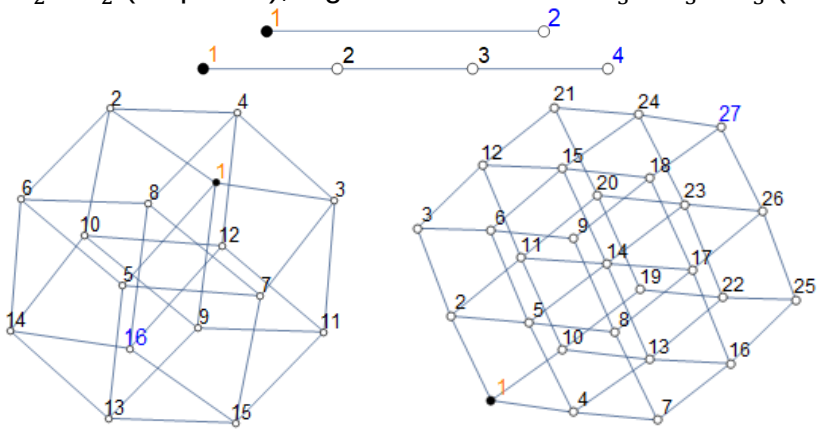
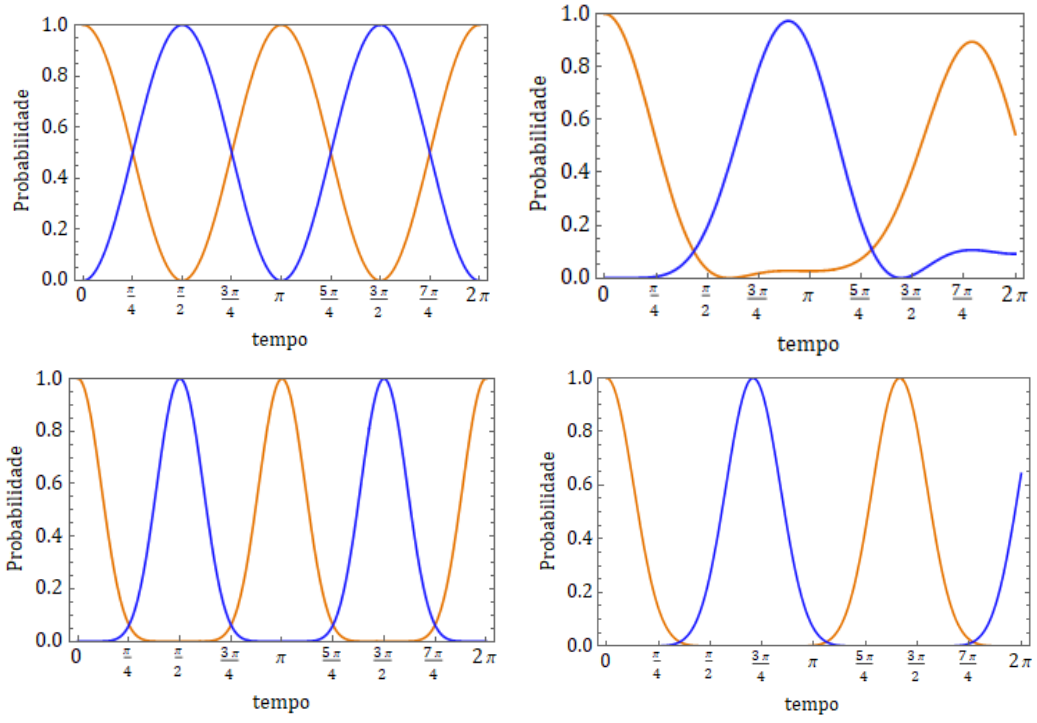


Figura 3 – Gráficos da probabilidade de encontrar o estado quântico no vértice inicial (1, curva laranja) e no vértice final (n, curva azul) para o P_2 (esquerda superior), P_4 (direita superior), Q_4 (esquerda inferior) e $P_3 \times P_3 \times P_3$ (direita inferior).



Conclusões

Nesse trabalho estudamos a TPE em grafos. Verificamos que TPE ocorre no P_2 e no P_3 e também nos produtos cartesianos entre P_2 com ele mesmo, e P_3 com ele mesmo, assim como já proposto na literatura. Verificamos isso para até o hipercubo Q_8 que possui 256 vértices. Encontramos dificuldades computacionais para calcular a TPE em grafos Q_n com $n > 8$ (para esses casos os grafos possuem mais de 512 vértices) e produtos cartesianos com apenas o P_3 maiores que o $P_3 \times P_3 \times P_3$, mas verificamos a TPE para os Q_n com $n \leq 8$.

A TPE em grafos obtidos por produtos cartesianos, nas nossas verificações, sempre ocorreu para os mesmos valores de tempo dos grafos iniciais utilizados para o produto (P_2 com P_2, P_3 com P_3, P_2 com K_n e P_2 com P_n' para o tempo do P_2) e não verificamos a TPE para grafos envolvendo produtos cartesianos entre P_2 e P_3. Também verificamos a TPE para grafos caminho ponderados com n até 7, produtos cartesianos entre esses grafos e o P_2 e produtos cartesianos entre grafos completos K_n e P_2 com grafo resultante X_m onde m é divisível por 4 e até $m = 40$. Por fim, não obtivemos TPE nos grafos completos K_n sozinhos, o que já era previsto na literatura.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Agradeço ao professor Fabiano por se dispor a designar parte de seu tempo para me ensinar e orientar nos assuntos abordados nesta iniciação.

Referências

[1] NIELSEN, Michael Aaron; CHUANG, Isaac. **Quantum Computation and Quantum Information**. 2. ed. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2010. 670 p.
[2] BOSE, Sougato. Quantum Communication through an Unmodulated Spin Chain. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 91, n. 20, 10 nov. 2003.
[3] SOUZA, Bruna Santos de. **Produtos e Coespectralidade de Grafos**. 2016, 83 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.
[4] NIKOPOULOS, George M.; JEX, Igor. **Quantum State Transfer and Network Engineering**. Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 2014. 250 p.
[5] BOSE, Sougato. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. **Contemporary Physics**, v. 48, n. 1, p.13-30, jan. 2007.
[6] COUTINHO, Gabriel de Morais. **Quantum State Transfer in Graphs.** 2014, 128. Universidade de Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 2014.
[7] CHRISTANDL, Matthias; DATTA, Nilanjana; EKERT, Artur. LANDAHL, Andrew John. Perfect State Transfer in Quantum Spin Networks. **Physical Review Letters**, [s.l.], v. 92, n. 18, p.1-1, 4 maio 2004.
[8] KEMPE, J. Quantum Random Walks, an Introductory Overview. **Contemporary Physics,** [s.l.] v. 44, n. 4, Ago 2003.
[9] GODSIL, Chris. State transfer on graphs. **Discrete Mathematics**, v. 312, n. 1., p.129-147, jan. 2012.
[10] CHRISTANDL, Matthias; DATTA, Nilanjana; DORLAS, Tony C.; EKERT, Artur; KAY, Alastair; LANDAHL, Andrew J. Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks. **Physical Review A,** v. 71, n. 3, 14 Mar 2005.