SÉRIES INCONDICIONALMENTE CONVERGENTES

Matheus Tabajara Sampaio Handler (PROVIC), Marcos Teixeira Alves (Orientador),
e-mail: bentivimatheus@gmail.com e-mail do orientador: mtalves@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise

Palavras-chave: Séries numéricas, convergência absoluta e incondicional, Teorema de Riemann.

Resumo
O seguinte trabalho consiste no estudo das séries numéricas do ponto de vista da convergência absoluta e incondicional. Realizou-se um estudo detalhado das sequências e séries numéricas visando o Teorema de Riemann que garante a equivalência entre a convergência absoluta e a condicional.

Introdução

Em relação a uma série de números reais, interessa saber se a soma é finita (a série é dita convergente), se a soma em módulo é finita (a série é absolutamente convergente) e se a ordem das parcelas não altera a soma (a série é dita incondicionalmente convergente). Inicialmente, mostramos que toda série absolutamente convergente é convergente, ressaltando que a recíproca não ocorre (um contraexemplo clássico trata-se da série harmônica alternada). Tais séries são chamadas condicionalmente convergentes.
Quanto à convergência incondicional, sabemos de um resultado de Dirichlet que uma série numérica é incondicionalmente convergente se, e somente se, é absolutamente convergente. Além de provarmos este resultado, analisamos o comportamento das séries condicionalmente convergentes. Surpreendentemente, verificamos que uma série condicionalmente convergente pode ser reordenada de forma a convergir para qualquer número real previamente escolhido. Com isso, existem apenas duas possibilidades, diametralmente opostas, para uma série convergente: ou ela se comporta como somas finitas, no sentido de que a ordem das parcelas não altera a soma; ou então a ordem das parcelas altera a soma de forma radical, no sentido de que a soma pode resultar em qualquer número, bastando para isso uma escolha adequada da ordem das parcelas. Esta análise corresponde ao desfecho do trabalho.

Material e Métodos

A pesquisa foi desenvolvida com base em estudos dirigidos e seminários apresentados semanalmente. As bibliografias básicas foram definidas no primeiro encontro e utilizadas como leitura obrigatória. Iniciamos com o estudo detalhado das noções de sequências numéricas, progredindo para a caracterização das séries numéricas demonstrando os principais critérios de convergência. Em seguida, estabelecemos os principais resultados relacionados com os tipos de convergência de séries: absoluta e (in)condicional.

Resultados e Discussão

ISSN 1676-0093

Os principais resultados da pesquisa foram elencados a seguir:

Teorema 1 (de Dirichlet):

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma reordenação qualquer da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

i) Se $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ também é absolutamente convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definição 1:

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é dita *incondicionalmente convergente* se, para qualquer aplicação $\emptyset: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijetora a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\emptyset(n)}$ é convergente.

O item (ii) do teorema de Dirichlet (**Teorema 1**) afirma que toda série absolutamente convergente é incondicionalmente convergente. A recíproca desta implicação é verdadeira e será provada no **Teorema 2**. Antes, estudamos o seguinte lema:

Lema 1:

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ condicionalmente convergente com $p_n = a_n^+$ e $q_n = a_n^-$ (p_n é a parte positiva de a_n e q_n é a parte negativa de a_n) de modo que $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$, $p_n + q_n = |a_n|$ e $p_n - q_n = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty.$$

Demonstração:

Suponhamos que apenas uma dessas séries converge (a primeira por exemplo). Logo, existe $S \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = S$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$, dado $L > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $n > M$ implica $\sum_{n=1}^{\infty} q_k > 2L + S$. Visto que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = S$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\sum_{n=1}^{\infty} p_k - S| < L$ sempre que $n > N$.

Escolhemos $n_0 = \max\{M, N\}$. Como consequência, para todo $n > n_0$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} p_k - \sum_{n=1}^{\infty} q_k < (L + S) - (2L + S) = -L$, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$, que é absurdo, uma vez que esta série converge.

O caso em que tomamos $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ é similar. Sob essas hipóteses, obteremos a contradição $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ fossem ambas convergentes, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seria absolutamente convergente, o que é absurdo.

Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$.

Teorema 2 (de Riemann)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado $c \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c$.

Demonstração:

Sejam (p_n) e (q_n) conforme o **Lema 1.**

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (condição de anulamento). Além disso:

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = 0 \qquad (2)$$

Uma vez que $0 \leq p_n \leq |a_n|$, $0 \leq q_n \leq |a_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, entretanto, de acordo com o **Lema 1**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty.$$

Reordenemos os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tomando como os primeiros termos: $p_1, p_2, \dots, p_{n1}$, escolhidos na ordem com que aparecem na série, em que $n1 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que $p_1 + p_2 + \dots + p_{n1} > c$.

Em seguida, escolhemos os termos negativos $-q_1, -q_2, \dots, -q_{n2}$, (primeiro termo negativo da série, segundo termo negativo da série, etc.) em que $n2 \in \mathbb{N}$ é o menor índice tal que $p_1 + p_2 + \dots + p_{n1} - q_1 - q_2 \dots - q_{n2} < c$.

Observamos que as escolhas para $n1$ e $n2$ são possíveis, já que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$. Continuamos assim escolhendo o menor índice $n3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_1 + \dots + p_{n1} - q_1 - \dots - q_{n2} + p_{n1+1} + \dots + p_{n3} - q_{n2+1} - \dots - q_{n4} < c$$

Prosseguindo dessa maneira, obtemos uma reordenação da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ em que a sequência das somas parciais da nova série, que denotaremos por (t_n), converge para c.

De fato, para qualquer $i \in \mathbb{N}$, i ímpar, temos:

i) $t_{n(i+1)} < c < t_{n1}$ (devido ao procedimento estabelecido acima);
ii) $t_{n1} - p_{ni} \leq c$ (devido a escolha de $ni \in \mathbb{N}$) $\to 0 < t_{n1} - c \leq p_{ni}$);
iii) $t_{n(i+1)} + q_{n(i+1)} \leq c$ (devido a $n(i+1) \in \mathbb{N}$) $\to 0 < c - t_{n(i+1)} \leq q_{n(i+1)}$).

Decorre de (2) que $\lim_{n\to+\infty} p_{ni} = \lim_{n\to+\infty} q_{n(i+1)} = 0$ aplicando o teorema do confronto em ii) e iii), obtemos $\lim_{n\to+\infty} t_{n1} = \lim_{n\to+\infty} t_{n(i+1)} = c$.

Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, temos:

iv) se $i \in \mathbb{N}$ for ímpar e $ni < n < n(i+1)$, então $t_{n(i+1)} \leq t_n \leq t_{ni}$.
v) se $i \in \mathbb{N}$ for par e $ni < n < n(i+1)$), então $t_{ni} \leq t_n \leq t_{n(i+1)}$.

Portanto, concluímos que $\lim_{n\to+\infty} t_n = c$.

De posse do Teorema de Riemann, estabelecemos a equivalência absoluta e convergência incondicional para séries numéricas. Este fato é apresentado no teorema a seguir:

Teorema:

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente

Demonstração:

A ida corresponde ao item ii) do teorema de Dirichlet (**Teorema 2**).

Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não convirja absolutamente. Então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é condicionalmente convergente e pelo teorema de Riemann, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, existe uma reordenação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = c$. Ou seja,é possivel encontrarmos uma reordenação $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Essa afirmação leva-nos a uma contradição, visto que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é incondicionalmente convergente. Portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

Conclusão/ões

Este trabalho trata dos resultados de um projeto de iniciação científica iniciado em agosto de 2018 e finalizado em julho de 2019. Foram estabelecidos resultados relativos às séries numéricas do ponto de vista de convergência absoluta e incondicional. Para este estudo, houve a preocupação de que pré-requisitos fossem discutidos antecipadamente de forma detalhada, evitando grandes dificuldades no desenvolvimento dos resultados, como por exemplo: o estudo das sequências numéricas e noções de Análise Real.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela oportunidade de participar da iniciação científica na modalidade PROVIC.

Referências

APOSTOL, T. M. **Cálculo.** Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1981.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2006.

BOTELHO, G. **Séries Incondicionalmente Convergentes: de Dirichlet a Dvoretsky-Rogers.** Matemática Universitária. Rio de Janeiro: SBM, nº 30, p. 103-111.

DOERING, K. **Análise Matemática na Reta.** Rio de Janeiro: SBM, 2017.

KAPLAN, W. **Cálculo avançado Volume II.** São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1972.

LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1.** Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 1.** Rio de Janeiro: IMPA, 2016.