TRANFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Marcela Ferreira da Silva (PROVIC), Marcos Teixeira Alves (Orientador), e-mail: marcelafsilva22@hotmail.com e-mail do orientador: mtmarcos@gmail.com

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise Complexa

Palavras-chave: Números complexos, Transformações Elementares em $\mathbb{C}$, Möbius.

Resumo

O estudo das transformações de Möbius desempenha um papel muito importante em várias áreas da matemática, bem como da ciência como um todo; uma destacável aplicação destas transformações reside no fato delas tornarem possível transformar problemas aparentemente complicados em problemas análogos com soluções mais simples. Foi o matemático August Ferdinand Möbius quem introduziu essas transformações. Inicialmente estudamos as transformações elementares definidas em $\mathbb{C}$. Em seguida, caracterizamos as transformações de Möbius, destacando algumas de suas propriedades. O desfecho do presente trabalho apresenta resultados importantes no sentido de determinar transformações de Möbius.

Introdução

A real motivação para a introdução dos números complexos surgiu no século XVI, quando Cardan descobriu que algumas equações do terceiro grau possuíam raízes reais, mas em cujas fórmulas resolventes não se conseguia evitar expressões envolvendo radicais quadráticos de números negativos. Essa dificuldade motivou Bombelli a criar novos números, vistos com desconfiança por algumas gerações de matemáticos e posteriormente batizados por Gauss de números complexos. No início do século XIX, com a representação geométrica dada aos números complexos, às suas operações e com o seu emprego por Gauss para deduzir propriedades dos números inteiros, é que foram conquistando legitimidade. Como veremos, as transformações de Möbius são definidas com base neste conjunto. Na primeira seção conheceremos as principais transformações elementares definidas em $\mathbb{C}$: translação, homotetia, rotação, multiplicação e inversão. Na seção seguinte, definiremos as transformações de Möbius. Para tanto, discutiremos a necessidade de ampliar o conjunto dos números complexos. Finalizaremos estabelecendo algumas propriedades destas transformações, como o fato de serem vistas como composição de transformações elementares.

Material e Métodos

Utilizaram-se referências relacionadas com a temática da iniciação científica. Foram realizados seminários semanais, onde os conteúdos eram apresentados e discutidos sob orientação do profº Marcos Teixeira Alves (DEMAT - UEPG).

Resultados e Discussão

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em (HEFEZ; VILLELA, 2012) ou em (ÁVILA, 2000).

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES EM $\mathbb{C}$

Uma função complexa de variável complexa é uma função $f: S \to \mathbb{C}$, em que S é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Estudamos cinco transformações com propriedades geométricas importantes: translações, homotetias, rotações, multiplicações e a inversão.

1. **Translação**

É uma transformação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, definida por $T_\beta(z) = z + \beta$ com $\beta \in \mathbb{C}$. Observamos que para cada número complexo w, existe um único número complexo z tal que $w = T_\beta(z) = z + \beta$. Além disso, escrevendo $z = x + iy, \beta = a + ib$ e $T_\beta(z) = u + iv$, pela igualdade de números complexos, temos:

$$T_\beta(z) = z + \beta \Leftrightarrow u + iv = (x + a) + i(y + b) \Leftrightarrow u = x + a \text{ e } v = y + b.$$

2. **Homotetia com fator $r \in \mathbb{R}_+$**

É a transformação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ definida por $H_r(z) = rz$ com $r \in \mathbb{R}^+$. Notamos que para $w \in \mathbb{C}$, existe um único $z = \frac{1}{r}w \in \mathbb{C}$ tal que $w = rz$. Com isso, H_r é uma bijeção cuja inversa é a homotetia $H_{\frac{1}{r}}$. Sendo $|H_r(z)| = r|z|$ e $\arg\big(H_r(z)\big) = \arg(z)$, vemos que a transformação H_r é uma contração de $|z|$ quando $0 < r < 1$, uma dilatação de $|z|$ quando $r > 1$, e sempre mantendo fixo o argumento de z.

3. **Rotação**

Definimos rotação de θ radianos como sendo a transformação: $R_\theta(z) = e^{i\theta}z$. O domínio e seu contradomínio é $\mathbb{C}$. Para cada $w \in \mathbb{C}$, existe um único número complexo $z = e^{-i\theta}w$ tal que $R_\theta(z) = w$, donde garantimos que R_θ é uma bijeção em $\mathbb{C}$ cuja inversa é a rotação $R_{-\theta}$. Como $|R_\theta(z)| = |z|$ e $\arg\big(R_\theta(z)\big) = \theta + \arg(z)$, a transformação de z por R_θ é uma rotação em torno da origem do plano complexo.

4. **Multiplicação por $\alpha \in \mathbb{C}$**

Seja $\alpha \in \mathbb{C}$ um número complexo não nulo. A multiplicação é definida por $H_\alpha(z) = \alpha z$. Se escrevermos $\alpha = re^{i\theta}$ com $r, \theta \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, então

$$H_\alpha(z) = re^{i\theta}z = rR_\theta(z) = H_r(R_\theta(z)) \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

5. **Inversão**

A transformação $J(z) = \frac{1}{z}$ é chamada de inversão e o seu domínio é $\mathbb{C} - \{0\}$, e seu contradomínio é $\mathbb{C} - \{0\}$. Observamos que:

$$J(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{I(z)} = C(I(z))$$

em que $C(z) = \bar{z}$ é a transformação de conjugação e $I(z) = \frac{z}{|z|^2}$ é a inversão em relação ao círculo unitário.

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS

Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ e } ad - bc \neq 0.$$

O domínio e contradomínio de $f(z)$ é $\mathbb{C}$.

Observamos que as transformações elementares apresentadas anteriormente são também transformações de Möbius:

- **Translação:** $T_\beta(z) = z + \beta \in \mathbb{C}$, corresponde a $a = 1, b = \beta, c = 0$ e $d = 1$;

- **Multiplicação:** $H_\alpha(z) = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$, corresponde a $a = \alpha, b = 0, c = 0$ e $d = 1$;
- **Inversão:** $J(z) = \frac{1}{z}$ corresponde a $a = 0, b = 1, c = 1$ e $d = 0$.

Quando compomos transformações de Möbius, há pontos do plano complexo que são problemáticos por não estarem no domínio ou na imagem de algumas delas. Para isto, consideramos o *plano complexo completado,* denotado por $\hat{\mathbb{C}}$, como a união do plano complexo $\mathbb{C}$ com um ponto no infinito que não está em $\mathbb{C}$ e que será denotado por ∞. Assim,

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

A transformação de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $ad - bc \neq 0$ e $c \neq 0$, será agora uma transformação em $\hat{\mathbb{C}}$, pondo $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ e $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Dessa maneira, f passa a ser uma bijeção de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.

No caso em que $c = 0$, temos que f é da forma $f(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha \neq 0$, que é uma bijeção de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Portanto, definindo $f(\infty) = \infty$, obtemos também uma bijeção de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$.

Com base na função $f(z)$ quando $c = 0$, temos $f = T_\beta \circ H_\alpha$, em que $\alpha = \frac{a}{d}$ e $\beta = \frac{b}{d}$. Por outro lado, se $c \neq 0$, garantimos que

$$f = T_\beta \circ H_\alpha \circ J \circ T_\gamma \text{ com } \alpha = -\frac{ad-bc}{c^2}, \beta = \frac{a}{c} \text{ e } \gamma = \frac{d}{c}.$$

Os dois fatos anteriores revelam que toda transformação de Möbius é obtida por composição de translações, multiplicações por números complexos e inversões. Por esta razão, essas transformações, são também chamadas de *transformações de Möbius elementares.*

- **DETERMINAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS**

Mostramos que os valores em três pontos distintos de uma transformação de Möbius a determinam (HEFEZ; VILLELA, 2012).

Definição 1: Um elemento $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ é chamado de ponto fixo da transformação de Möbius f se, e somente se $f(z_0) = z_0$.

Exemplo: 1 e -1 são pontos fixos da inversão J e esses são seus únicos pontos fixos, pois $J(x) = x \Leftrightarrow J(z) = z \Leftrightarrow \frac{1}{z} = z \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$.

Exemplo: ∞ é ponto fixo de f definida por $f(z) = \alpha z + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{c}$ e $\alpha \neq 0$.

Notamos que ∞ só é ponto fixo das transformações que são uma composição de uma translação e uma multiplicação por um número complexo α, isto é $T_\beta \circ H_\alpha$. Se considerarmos uma transformação de Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, com $c \neq 0$, teremos $f(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, logo ∞ não é ponto fixo de f. Portanto , se f é a composição de uma translação e uma homotetia, então $f(\infty) = \infty$.

Proposição 1: Uma transformação de Möbius distinta da identidade tem um ou dois pontos fixos em $\hat{\mathbb{C}}$.

Corolário 1: Uma transformação de Möbius com mais de dois pontos fixos é a identidade.

Corolário 2: Duas transformações de Möbius que possuem o mesmo valor em três pontos distintos de $\hat{\mathbb{C}}$ são iguais.

Proposição 2: Dados dois pares de ternas de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 de $\hat{\mathbb{C}}$, existe uma única transformação de Möbius f, tal que $f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2$ e $f(z_3) = w_3$.

Demonstração: Já sabemos que ela existe e que é única. Provaremos a existência da f, com o auxílio da razão cruzada de z_1, z_2, z_3, z_4, como sendo:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}$$

Existem transformações de Möbius g e h em $\hat{\mathbb{C}}$ tais que $g(z_4) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$.

A razão cruzada é um invariante para as transformações, ou seja, vale $[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ para quaisquer quatro pontos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 de $\hat{\mathbb{C}}$.

Conclusão/ões

Este trabalho trata dos resultados de um projeto de iniciação científica iniciado em agosto de 2018 e finalizado em julho de 2019. Foram definidas as transformações elementares e as transformações de Möbius, discutidas suas propriedades e formas de determina-las.

Para este estudo, houve a preocupação de que pré-requisitos fossem discutidos antecipadamente de forma detalhada, evitando grandes dificuldades no desenvolvimento dos resultados, como por exemplo: os conhecimentos relativos à álgebra dos números complexos.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela oportunidade de participar da iniciação científica na modalidade PROVIC.

Referências

CONWAY, J. B. **Functions of One Complex Variable.** New York, Springer, 1973.
HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. **Basic Complex Analysis.** New York: W. H. Freeman, 1999.
NEEDHAM, T. **Visual Complex Analysis.** New York: Clarendon Press, Oxford, 2000.
SOARES, M. G. **Cálculo em uma Variável Complexa.** Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3a ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2000.