ASPECTOS TOPOLÓGICOS E ALGÉBRICOS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Luna Rhaine Nascimento Oliveira (PICME/UEPG), Prof. Marcos Calçada (Orientador), e-mail: mcalcada@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Ciências Exatas e da Terra - Física

Palavras-chave: Circuitos elétricos, 1-complexo, Leis de Kirchhoff, Método de Weyl, operador de Laplace.

Resumo

Circuitos elétricos são uma coleção de componentes elétricas interligadas. Eles são modelados matematicamente, no que tange às diferentes interconexões entre as componentes elétricas, por grafos ou 1-complexos. O principal objetivo desse trabalho é formular parte da teoria de circuitos elétricos usando tais métodos, de modo a entender a influência da topologia do complexo no comportamento físico do circuito elétrico correspondente. Para tanto, definimos os espaços vetoriais de 0-cadeias e 1-cadeias, associados aos vértices e aos ramos de um complexo. Também definimos os espaços vetoriais duais de 0-cocadeias e 1-cocadeias. A seguir, de forma natural, definimos operadores lineares entre tais espaços vetoriais – os operadores de fronteira e de cofronteira. Um operador fundamental na teoria é o laplaciano construído a partir dos operadores de fronteira e cofronteira. As Leis de Kirchhoff da Corrente e da Voltagem são, então, escritas nessa linguagem, o que nos permite determinar todas as correntes ou todos os potenciais empregando o Método de Weyl, para circuitos puramente resistivos, e a inversão do operador de Laplace, para circuitos capacitivos.

Introdução

Um circuito elétrico é uma coleção de componentes elétricas (tais como resistores, capacitores, indutores e baterias) interligadas. Eles são modelados matematicamente, no que tange às diferentes interconexões entre as componentes elétricas, por grafos ou 1-complexos. Aqui trataremos apenas de complexos de dimensão finita, ou seja, com um número finito de vértices e de ramos.

Assim, o conjunto de nós e o conjunto de fios de um circuito correspondem, respectivamente, aos conjuntos de vértices e de ramos de um 1-complexo [1]. Esses conjuntos geram espaços vetoriais, C_0 (0-cadeias) e C_1 (1-cadeias), uma vez que podemos identificar vértices e ramos como vetores. A seguir, de forma natural, definimos os seus espaços duais: C^0 (0-cocadeias) e C^1 (1-cocadeias).

Desse modo, podemos definir operadores lineares entre tais espaços vetoriais – os operadores de fronteira ∂ e de cofronteira d [2]. O operador de fronteira ∂ é uma aplicação linear de C_1 em C_0, isto é, se $\boldsymbol{K} = (K_\alpha, K_\beta, \dots)^T \in C_1$ e $\boldsymbol{L} = (L_A, L_B, \dots)^T \in C_0$, então $\partial \boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}$, onde $\alpha, \beta, \dots$ e $A, B, \dots$ representam, respectivamente, os ramos e os vértices do 1-complexo. Já o operador de cofronteira é uma aplicação linear de C^0 em C^1 definida por $df = f \circ \partial$, onde $f \in C^0$.

Seja $\boldsymbol{W} = (W^\alpha, W^\beta, \dots)^T \in C^1$, então denotamos $\boldsymbol{W}$ aplicado em $\boldsymbol{K}$ por:

$$\boldsymbol{W}[\boldsymbol{K}] = W^\alpha K_\alpha + W^\beta K_\beta + \cdots,$$

da mesma maneira, se $f = (f^A, f^B, \dots)^T \in C^0$ e $g = (g_A, g_B, \dots)^T \in C_0$,

$$f[g] = f^A g_A + f^B g_B + \cdots,$$

lembrando que todos esses vetores, apesar da notação dizer o contrário, têm dimensão finita. Também observe que [3]:

$$df[\boldsymbol{K}] = (f \circ \partial)[\boldsymbol{K}] = f\partial[\boldsymbol{K}].$$

Um operador fundamental na teoria é o laplaciano, o qual é construído a partir desses operadores. As Leis de Kirchhoff da Corrente e da Voltagem são, então, escritas nessa linguagem, o que nos permite determinar todas as correntes ou todos os potenciais do nosso circuito elétrico. Isso pode ser feito pela aplicação de diversos métodos, dentre eles o Método de Weyl, para circuitos puramente resistivos, e pela inversão do operador de Laplace, para circuitos capacitivos.

Material e Métodos

Na teoria de circuitos elétricos nosso objetivo central é calcular todas as correntes ou todos os potenciais de um circuito. Para tal usamos duas importantes leis, as Leis de Kirchhoff:

i. Da Corrente: A soma das correntes que entram e saem de um nó deve ser igual à zero.
ii. Da Voltagem: A voltagem em cada fio é dada pela diferença de potencial entre os nós inicial e final do fio.

Sejam Φ^N o potencial elétrico do vértice N, I_ε a corrente passando no fio ε, V^ε a diferença de potencial entre os vértices inicial e final de ε e z_ε a resistência do fio ε. Podemos notar que a voltagem é dual à corrente, uma vez que a potência elétrica é uma quantidade escalar dada por $P_\varepsilon = V^\varepsilon I_\varepsilon$.

Consequentemente, se a distribuição de corrente do circuito pode ser dada pelo vetor $\boldsymbol{I} = (I_\alpha, I_\beta, \dots)^{\boldsymbol{T}} \in C_1$, a Lei de Kirchhoff das Correntes pode ser reescrita por:

$$\partial \boldsymbol{I} = 0.$$

Ademais, se a distribuição de voltagem do nosso circuito for dada por $\boldsymbol{V} = (V^\alpha, V^\beta, \dots)^{\boldsymbol{T}} \in C^1$, e a distribuição de potencial for dada por $\Phi = (\Phi^A, \Phi^B, \dots)^{\boldsymbol{T}} \in C^0$, concluímos que a Lei de Kirchhoff das Voltagens pode ser descrita por:

$$\boldsymbol{V} = -d\Phi.$$

Resultados e Discussão

Para circuitos resistivos, seja z_ε a resistência do fio ε, $V^\varepsilon - W^\varepsilon$ a tensão e $I_\varepsilon - K_\varepsilon$ a corrente através do resistor do fio ε. Pela lei de Ohm,

$$V^\varepsilon - W^\varepsilon = z_\varepsilon\,(I_\varepsilon - K_\varepsilon),$$

logo, se Z for uma matriz diagonal cujas entradas são as resistências de cada ramo, matricialmente, temos que:

$$\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W} = Z(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}),$$

onde $\boldsymbol{K}$ representa a fonte de corrente e $\boldsymbol{W}$ a fonte de tensão.

O método de Weyl dispõe do fato que a matriz Z é uma matriz definida positiva e, portanto, define um produto interno [1] no espaço das 1-cadeias, sendo possível definir o operador auto-adjunto de projeção ortogonal π, que é usado para determinar as correntes e as voltagens do circuito através das expressões:

$$\boldsymbol{I} = \pi(\boldsymbol{K} - Z^{-1}\boldsymbol{W}),$$

e

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Z}(\pi - 1)(\boldsymbol{K} - Z^{-1}\boldsymbol{W}).$$

Esse operador π pode ser encontrado pelo método de Kirchhoff, que utiliza as árvores maximais do complexo, ou pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Para circuitos capacitivos, seja Q_ε a carga atravessando o ramo ε e c_ε a capacitância do ramo ε. Então, pela definição de capacitância,

$$V^\varepsilon - W^\varepsilon = \frac{Q_\varepsilon}{c_\varepsilon},$$

se $\boldsymbol{Q} = (Q_\alpha, Q_\beta, \dots)^T \in C_1$ e C é uma matriz diagonal cujas as entradas são as capacitâncias, constatamos que:

$$\boldsymbol{V} - \boldsymbol{W} = C^{-1}\boldsymbol{Q}.$$

Assumindo que todos os capacitores do nosso circuito possuem cargas iniciais, há uma densidade de carga inicial ρ_N no vértice N. Então temos o vetor $\boldsymbol{\rho} = (\rho_A, \rho_B, \dots)^T \in C_0$. Tendo em vista que, por convenção de sinal, a placa negativa do capacitor está conectada ao vértice final do ramo correspondente, temos que:

$$\partial \boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{\rho},$$

essa equação é conhecida como Lei de Gauss.

Caso consideremos que nossos circuitos capacitivos têm cargas iniciais, mas não possuem fonte de tensão, notamos que:

$$\boldsymbol{Q} = C\boldsymbol{V},$$

aplicando o operador de fronteira em ambos os membros,

$$\partial \boldsymbol{Q} = \partial C\boldsymbol{V},$$

segundo a Lei de Kirchhoff da Voltagem e a Lei de Gauss:

$$-\boldsymbol{\rho} = -\partial C d\Phi,$$

fazendo $\Delta = -\partial C d$,

$$\Delta\Phi = -\boldsymbol{\rho},$$

e essa equação é chamada de Equação de Poisson.

O operador $\Delta = -\partial C d$ é conhecido como operador de Laplace, pois na teoria de Hodge Laplacians esse operador equivale ao primeiro laplaciano de Hodge [4]. Notamos que $\Phi = -\Delta^{-1}\boldsymbol{\rho}$, logo, podemos calcular os potenciais conhecendo apenas a densidade de carga, a capacitância e as características topológicas do circuito.

Conclusão/ões

Com tudo isso percebemos que circuitos elétricos são entes físicos que tornam o estudo de aspectos topológicos e algébricos de 1-complexos mais intuitivo. Ademais verificamos que as Leis de Kirchhoff podem ser descritas através de quantidades que descrevem a topologia de grafos com ramos orientados. E por fim, foi possível constatar que podemos encontrar as correntes e os potenciais de um circuito com o Método de Weyl ou com a inversão do operador de Laplace.

Agradecimentos

A elaboração desse trabalho não teria sido possível sem o incentivo do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), que através do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) disponibilizou o auxilio financeiro. A esse órgão nosso agradecimento. Também somos gratos a UEPG por disponibilizar o ambiente de estudo.

Referências

[1] OLVER, P. J. SHAKIBAN, C. **Applied Linear Algebra. Springer**, 2018. Ebook. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.10072F978-3-319-91041-3. Acesso em: 14 jun. 2018.

[2] BAMBERG, P. STERNBERG, S. **A Course in Mathematics for Students of Physics 2**. Cambridge University Press, 1991.

[3] AXLER, S. **Linear Algebra Done Right. Springer**, 2015. Ebook. Disponível em: https://www.springer.com/br/book/9783319110790. Acesso em: 11 jul. 2018.

[4] LIM, L. **Hodge Laplacians on Graphs**. Conell University, 20 juho 2015. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1507.05379. Acesso em: 9 mar. 2018.