SOLUÇÕES ANALÍTICA E NUMÉRICA DE UM PROBLEMA COM A EQUAÇÃO DO CALOR

Lucas Martinelli (PIBIC/UEPG), Jocemar de Quadros Chagas (Orientador), e-mail: jocemarchagas@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática (1.01.00.00-8), Equações Diferenciais Parciais (1.01.02.05-1)

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais, Método da Separação de Variáveis, Método das Diferenças Finitas.

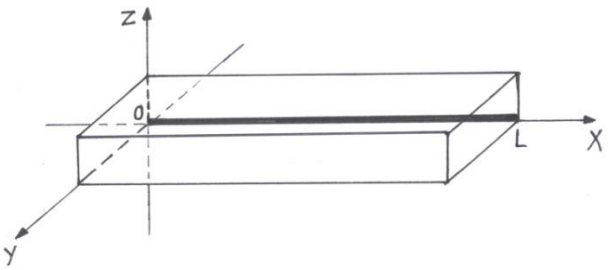
Resumo

Durante o desenvolvimento deste trabalho foram estudados métodos para resolução de EDPs (Equações Diferenciais Parciais) em específico a Equação do Calor. Foram obtidas duas soluções, a exata e a numérica, esta sendo obtida através do Método de Diferenças Finitas e aquela pelo Método de Separação de Variáveis. As soluções foram comparadas a fim de verificar a qualidade do código numérico desenvolvido.

Introdução

Neste trabalho consideramos uma barra constituída de um material condutor uniforme de calor, de comprimento L, com seção transversal de área A e com sua superfície lateral isolada termicamente. Nessas condições, a temperatura na barra independe das coordenadas y e z, tornando-se um problema de condução de calor em apenas uma dimensão (Figura 1).

Figura 1 – Barra tridimensional; condução de calor em apenas uma dimensão.



A formulação matemática deste problema (veja adiante a dedução da equação), considerando as extremidades da barra em temperatura constante e igual a zero, é:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, & 0 \le x \le L \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Para este *Problema de Valor Inicial e de Contorno* (PVIC) com a *Equação do Calor*, apresentaremos a solução exata, obtida através do Método da Separação das Variáveis (ver, por ex., [1, 4]), e uma solução numérica obtida através do Método das Diferenças Finitas (ver [2]), implementada no software Octave. Por fim faremos a comparação da solução numérica com a solução exata.

Material e Métodos

Na elaboração deste trabalho foram realizados estudos das teorias matemáticas necessárias para a compreensão e resolução do PVIC (1). Tais estudos permitiram

compreender a dedução da Equação do Calor [3], encontrar a solução exata para o PVIC (1) [1, 4], e desenhar um esquema numérico para a obtenção da solução numérica para o mesmo PVIC [2]. A solução numérica (e a comparação entre os dois tipos de solução) foi obtida utilizando o software Octave nos computadores do Laboratório de Informática do DEMAT.

Resultados e Discussão

Para a **dedução** da Equação do Calor, consideramos a situação descrita na Introdução. Se denotarmos por $u(x,t)$ a temperatura da barra em um ponto de abcissa x no instante t, ao aplicarmos a Lei do Resfriamento de Fourier para representar a passagem de calor de um ponto x para outro, com distância d deste ponto, chegamos em:

$$Q = kA\left|\frac{u(x+d,t)-u(x,t)}{d}\right|$$

onde k é o coeficiente de condutibilidade termica do material e Q, a quantidade de calor transferida de um ponto a outro. Ao passarmos essa equação ao limite, com $d \to 0$, obtemos a grandeza $Q = k\,A\,|u(x,t)|$ como o fluxo de calor através da seção A no instante t. Dessa forma, se a temperatura da barra diminui ao longo do eixo x, podemos definir o fluxo de calor como:

$$q(x,t) = -kA\,u_x(x,t).$$

Podemos descobrir então a quantidade de calor q que flui pelo pedaço da barra delimitado pelas seções transversais em x e $x+d$, entre os tempos t_0 e t_0+h:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+h} q(x_0,t)\,dt - \int_{t_0}^{t_0+h} q(x_0+d,t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+h}\int_{x_0}^{x_0+d} kA\,u_{xx}(x,t)\,dx\,dt.$$

Sabendo que essa mesma quantidade de calor pode ser expressa em função do *calor específico* c e do peso específico p do material (ver, por ex., [3]) por:

$$q = \int_{t_0}^{t_0+h}\int_{x_0}^{x_0+d} c\,pA\,u_t(x,t)\,dx\,dt,$$

podemos chegar à igualdade:

$$u_t = c^2 u_{xx}, \qquad (2)$$

onde $c^2 = \frac{k}{cp}$ é a constante de *difusibilidade térmica*. A equação (2) é conhecida por *Equação do Calor* e, entre outros fenômenos, modela a variação de temperatura $u(x,t)$ em uma barra de material uniforme, com a superfície lateral perfeitamente isolada. Obs: para obter a equação (2), supõe-se que sua solução u é uma função cujas derivadas u_t e u_{xx} existem e são continuas nos intervalos $0 \le x \le L$ e $t > 0$.

Para encontrar a **solução exata** do PVIC (1) com a Equação do Calor (2), utilizamos o **Método da Separação de Variáveis**, que consiste em supor que a solução $u(x,t)$ da Equação Diferencial Parcial (EDP), uma função de várias variáveis, possa ser escrita como a multiplicação de funções de uma única variável, no caso: $u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$. A *solução exata* do PVIC (1) tem a forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(\frac{-c^2\pi^2 n^2 t}{L^2}\right), \quad \text{onde} \quad C_n = \frac{2}{L}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx. \qquad (3)$$

ISSN 1676-0093

Entre as técnicas de **solução numérica** aplicáveis a EDP's, optou-se por fazer uso do **Método de Diferenças Finitas** (MDF), que consiste na discretização do domínio e na substituição das funções e derivadas presentes na equação diferencial por *aproximações* de tais funções e derivadas por valores numéricos calculados em cada *nó*, ou *ponto*, da *malha* obtida ao discretizar o domínio (transforma-se assim um problema contínuo em um problema discreto a ser resolvido em um número finito de pontos).

Neste trabalho, consideramos o esquema numérico mais simples: o método explícito com diferença central no espaço e diferença progressiva no tempo, de forma que o PVIC discretizado para o qual apresentaremos solução numérica é:

$$\begin{cases} \frac{v_i^{n+1}-v_i^n}{k} = c^2\left[\frac{v_{i+1}^n-2v_i^n+v_{i-1}^n}{h^2}\right], & n>0 \\ v_i^0 = f(ih), & h>0 \\ v_0^n = 0 = v_n^n, & n>0, \end{cases} \tag{4}$$

onde $v_i^0 = f(i\,h)$ representa os dados iniciais discretizados, e $v_0^n = 0$ representa a discretização da condição de fronteira à esquerda. Ao resolver explicitamente a equação de diferenças em (4) para v_i^{n+1} em termos de v_{i-1}^n, v_i^n e v_{i+1}^n, encontramos:

$$v_i^{n+1} = \lambda v_{i+1}^n + (1-2\lambda)v_i^n + \lambda v_{i-1}^n,$$

onde $\lambda = \frac{c^2\,k}{h^2}$.

Para realizar as simulações, utilizamos como condição inicial a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \le 0 \\ 1-cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right), & \text{se} \quad 0<x<L \\ 0, & \text{se} \quad x \ge 0, \end{cases}$$

e os seguintes parâmetros:

$L = 5$; $t = 1$; $c = 1$; $\lambda = 0{,}45$; $N = 500$ (equivalente a $h = \Delta x = 0{,}01$).

A tabela 1 traz, para o tempo $t = 1$, alguns valores da solução exata $u(x,1)$, calculados utilizando a expressão (3), da solução numérica $v(x,1)$, e do erro $E(x,1) = u(x,1) - v(x,1)$. A **comparação** entre a solução exata $u(x,1)$ e a solução numérica $v(x,1)$ pode ser vista na figura 2(a), com destaque para a sobreposição dos dois gráficos.

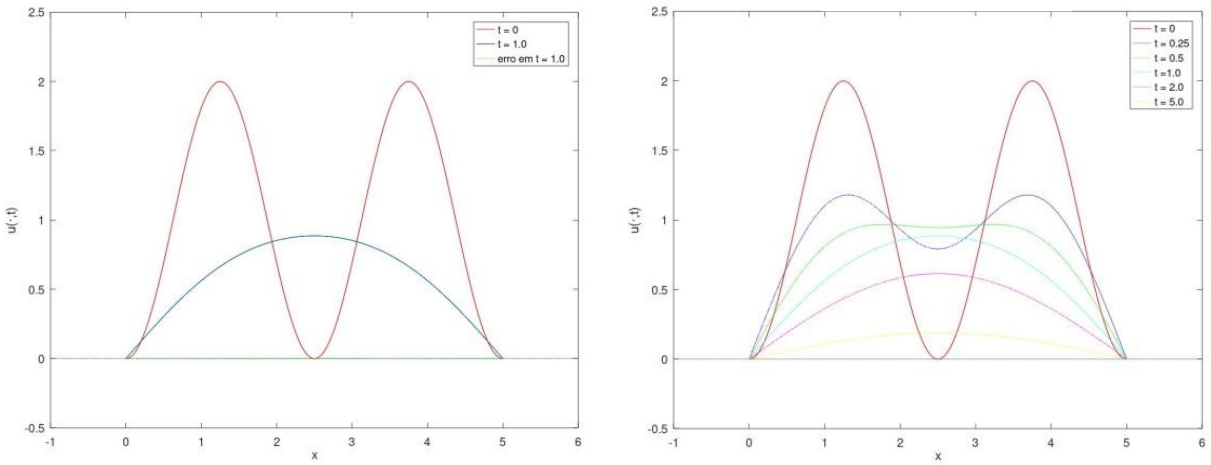
Tabela 1 – Valores das soluções exata u, numérica v, e do erro E, no tempo $t = 1$.

x	u	v	E
0,0	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000
0,5	0,2994274025	0,2992633877	0,0001640148
1,0	0,5595938172	0,5594775602	0,0001625698
1,5	0,7454465473	0,7456305353	- 0,0001839880
2,0	0,8514937420	0,8520427442	- 0,0005490021
2,5	0,8855555868	0,8862697041	- 0,0007141173
3,0	0,8528490731	0,8534041135	- 0,0005550404
3,5	0,7483347571	0,7485263136	- 0,0001915565
4,0	0,5640937605	0,5639813323	0,0001124281
4,5	0,3052113739	0,3050456792	0,0001656947
5,0	0,0000000000	0,0000000000	0,0000000000

ISSN 1676-0093

Para facilitar a compreensão do comportamento da solução do PVIC (1), observamos na figura 2(b) o perfil da solução exata em vários tempos, o que permite observar o comportamento esperado para a solução da Equação do Calor na situação apresentada: fluxo de calor das regiões de maior concentração para as regiões com menor concentração, com a temperatura da barra em todos os pontos tendendo a zero quando o tempo cresce consideravelmente.

Figura 2 – Soluções exata e numérica para $t = 1$; Solução exata para vários tempos.



(a) Comparação das soluções exata e numérica (b) Solução exta para vários tempos

Conclusões

Os passos desenvolvidos nesse trabalho de obtenção de uma solução exata para um problema simples e posterior proposição de um esquema numérico para resolver o mesmo problema, com a comparação das soluções numérica e exata, faz parte dos procedimentos básicos para a proposição de um esquema numérico que resolva um problema mais complexo: procuramos aqui ilustrar um processo de *validação* de um esquema numérico, em uma situação simples. Em um passo futuro, poderia-se estender o esquema validado para obter soluções numéricas de processos difusivos mais complicados.

Agradecimentos

Agradecimentos à UEPG, pelo suporte financeiro, através da concessão de bolsa de Iniciação Científica no Programa Institucional de Iniciação Científica – PIBIC.

Refeências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2015.

[2] CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JR., M. **Discretização de Equações Diferenciais Parciais**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Projeto Euclides, 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[4] IÓRIO JR., R.; IÓRIO, V. M. **Equações Diferenciais parciais:** uma introdução. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.