O CONJUNTO DE CANTOR

Leonardo Wrobel (PIBIC/FA), Marcos Teixeira Alves (Orientador), e-mail: leowcavanis@gmail.com e-mail do orientador: mtalves@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa/ Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise

Palavras-chave: Construção, função ternária, propriedades.

Resumo

No presente trabalho, abordamos o conjunto de Cantor. Inicialmente construímos seu conjunto com base nas retiradas sucessivas de terços médios do intervalo [0,1]. Estabelecidas algumas propriedades relativas à base ternária, estabelecemos uma caracterização dos elementos do conjunto de Cantor através dessa base. Estudadas algumas propriedades topológicas desse conjunto, dentre elas o fato de ser compacto, não enumerável e possuir interior vazio, finalizamos com a obtenção da função ternária de Cantor que é definida a partir desse conjunto.

Introdução

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em 3 de março de 1845 em São Petesburgo, Rússia. Em 1856, a família mudou-se para Frankfurt, na Alemanha, por motivo da doença que o pai contraíra. A família Cantor possuía notável talento musical, e com George Cantor não foi diferente. Desde a sua infância mostrou grande aptidão para a música. Porém, a matemática lhe chamou mais a atenção, tanto que, aos 15 anos, decidiu estudar essa ciência com o apoio de seu pai. Em 1862, Cantor começou seus estudos no Instituto Politécnico de Zurique, mas logo transferiu-se para a Universidade de Berlim, de maior prestígio. Lá, teve a oportunidade de aprender com grandes matemáticos, como Karl Weierstrass, Ernst Eduard Kummer e Leopold Kronecker.
Cantor faleceu em 06/01/1918 em Halle. Durante parte de sua vida, Georg dedicou-se no estudo de conjuntos e particularmente criou o conjunto de Cantor. Esse conjunto é obtido a partir da remoção dos terços médios abertos do intervalo [0,1]. Com base nesta construção é possível estabelecer algumas propriedades deste conjunto, e as mesmas têm relação com a base ternária, tanto que seus elementos são caracterizados a partir dela. Além disso, é possível é obter algumas propriedades topológicas desse intrigante conjunto, como o fato de ser compacto, não enumerável e possuir interior vazio. O presente estudo encerra-se com caracterização da função ternária de Cantor, que além de monótona é contínua em seu domínio.

Material e Métodos

Utilizou-se livros de análise real e artigos relacionados com o conjunto de Cantor. Foram realizados seminários semanais, onde os conteúdos eram apresentados e discutidos sob orientação do profº Marcos Teixeira Alves (DEMAT – UEPG).

Resultados e Discussão

1. Construção do conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor está definido no intervalo $I = [0,1]$, e é construído da seguinte forma: primeiramente trisseccionamos o intervalo I nos pontos $\frac{1}{3}$ $e\frac{2}{3}$. Feito isso, eliminamos o terço médio aberto que corresponde ao intervalo $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Denotamos por C_2o conjunto de pontos que restaram, ou seja,

$$C_1 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right].$$

Agora trisseccionamos esses dois intervalos nos pontos $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$; $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$, respectivamente, e tiramos os terços médios abertos desses intervalos, obtendo o conjunto C_2.

$$C_2 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right].$$

Realizado o processor infinitas vezes, encontraremos o conjunto de Cantor, como o conjunto de pontos que restaram após essas retiradas, ou seja, o definimos como:

Definição 1.1: O conjunto de Cantor C é a interseção dos conjuntos C_n, onde C_1 é obtido retirando-se o terço médio aberto do intervalo $I = [0,1]$, e para $n > 1$, C_n é obtido a partir da retirada dos terços médios abertos nos intervalos restantes em C_{n-1}. Ou seja,

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

2. Caracterização via base ternária

Definição 2.1: Seja x um número pertencente ao intervalo $[0,1]$. Este número tem representação na base ternária: $x = (0, a_1a_2 \ldots a_{n..} \ldots)_3$ em que

$$x = \frac{a_1}{3^1} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots$$

e os dígitos a_n podem ser apenas os algarismos: 0, 1 ou 2.

Observamos que $\frac{1}{9} = (0{,}01)_3$, pois $\frac{1}{9} = \frac{0}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \cdots + \frac{0}{3^n} + \cdots$. Além dessa expansão, $\frac{1}{9}$ pode ser escrito como $\frac{1}{9} = (0{,}002222 \ldots)_3$, onde o dígito 1 foi substituído, pois $1 = (0{,}22222 \ldots)_3$. Dessa forma, temos o

Teorema 2.2: Os elementos do conjunto de Cantor possuem expansão ternária usando apenas os dígitos 0 ou 2, isto é,

$$C = \left\{x \in [0,1]; x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}\ para\ i_n = 0\ ou\ i_n = 2\right\}.$$

3. Propriedades topológicas

Propriedade 4.1: O conjunto de Cantor é não vazio.

Propriedade 4.2: O conjunto de Cantor é não fechado.

ISSN 1676-0093

Propriedade 4.3: O conjunto dos pontos extremos dos intervalos retirados do conjunto de Cantor é enumerável.

Propriedade 4.4: O Conjunto de Cantor não contém intervalos, ou seja, $int(C) = \emptyset$.
Demonstração: Suponhamos por absurdo que $int(C) \neq \emptyset$, e seja $x \in int(C)$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset C$, por definição de ponto interior de um conjunto.
Segue que $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, ou seja, $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \subset C_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Haja visto que C_n é a união de 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$, o intervalo $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ deverá estar contido em um dos subintervalos de C_n. Como $\frac{1}{3^n} \to 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^n} < \varepsilon$. O intervalo $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ tem comprimento $2\varepsilon > \varepsilon > \frac{1}{3^{n_1}}$. Desta forma, não está contido em nenhum dos subintervalos de C_n. Logo, $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ não está contido em C_{n_1}, o que contradiz a afirmação acima. Portanto, $int(C) = \emptyset$.

Ainda foram demonstradas as seguintes propriedades:

Propriedade 4.5: O conjunto E dos extremos dos intervalos omitidos para formar o Conjunto de Cantor é denso em C.

Propriedade 4.6: Todo $x \in C$ é ponto de acumulação.

Propriedade 4.7: C é não enumerável.

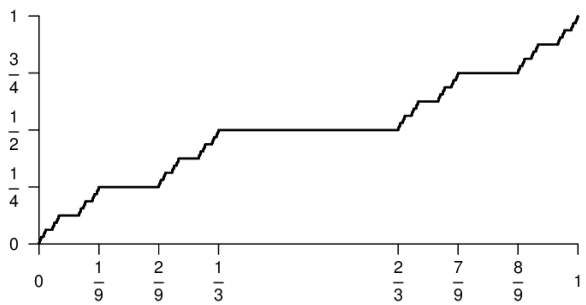
Propriedade 4.8: C é compacto.

Propriedade 4.9: O Conjunto C^c é denso em [0,1].

4. Função ternária de Cantor

Seja $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Definiremos primeiramente que: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e f restrita aos terços médios é constante e da seguinte forma:
$f|_{\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)}(x) = \frac{1}{2}$,$f|_{\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)}(x) = \frac{1}{4}$, $f|_{\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)}(x) = \frac{3}{4}$, $f|_{\left(\frac{1}{27};\frac{2}{27}\right)}(x) = \frac{1}{8}$, $f|_{\left(\frac{7}{27};\frac{8}{27}\right)}(x) = \frac{3}{8}$, $f|_{\left(\frac{19}{27};\frac{20}{27}\right)}(x) = \frac{5}{8}$, $f|_{\left(\frac{25}{27};\frac{26}{27}\right)}(x) = \frac{7}{8}$ e assim sucessivamente.
Abaixo apresentamos o gráfico dessa função:

Figura 1: Gráfico da função ternária de Cantor



Fonte: Google Imagens

Afirmação: A imagem da função f restrita ao conjunto C^c (conjunto complementar do conjunto de Cantor) é um conjunto denso em $[0,1]$.

Já definimos a função para os terços médios abertos. Agora definiremos para os elementos do conjunto de Cantor.

Para isso, seja $\alpha \in C - \{0,1\}$. Definimos: $f(\alpha) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in C^c}} f|_{C^c}(x)$.

Esta definição ocorre pelo fato da densidade de $Im(f|_{C^c})$ em C.

É possível demonstrar que a função f é contínua, ou seja,

$$\lim_{x \to \alpha^+} f|_{C^c}(x) = \lim_{x \to \alpha^-} f|_{C^c}(x) = f|_{C^c}(x)$$

Com todas essas informações, podemos definir a função ternária de Cantor como a função $F\colon [0,1] \to [0,1]$ que segue as seguintes condições:

I. $F(0) = 0$
II. $F(1) = 1$
III. $F|_{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}(x) = \frac{1}{2}$, $F|_{\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)}(x) = \frac{1}{4}$, $F|_{\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)}(x) = \frac{3}{4}$, ...
IV. Se $\alpha \in C - \{0,1\} \Rightarrow F(\alpha) = \lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x \in C^c}} F|_{C^c}(x)$

Conclusão/ões

Para este estudo, houve a preocupação de que pré-requisitos fossem discutidos antecipadamente de forma esclarecedora, evitando grandes dificuldades no desenvolvimento dos resultados, como por exemplo: conhecimentos relativos às séries numéricas, a caracterização e conversão de bases numéricas e algumas propriedades topológicas dos números reais.

Foi possível observar o quão intrigante é o conjunto de Cantor, desde a maneira como é construído, passando por suas interessantes propriedades, a relação de seus elementos com a base ternária e a obtenção da função ternária de Cantor. Finalmente, almeja-se, como estudos futuros, estabelecer e caracterizar conjuntos generalizados de Cantor.

Agradecimentos

Agradeço ao orientador Professor Marcos Teixeira Alves do DEMAT – UEPG e a Fundação Araucária pelo incentivo e pelo apoio financeiro.

Referências

ACZEL, O. **O mistério do Alef.** São Paulo: Globo, 2003
BARTLE, R. G. **Elementos de Análise Real.** Rio de Janeiro: Editora Campos, 1983.
LIMA, E. L. **Análise Real – Volume 1.** Rio de Janeiro, IMPA, 2004
LIMA, E. L. **Elementos de Topologia Geral.** Rio de Janeiro, SBM, 2009.
ROYDEN, H. L. **Real Analysis**. New York: Macmillan Publishing Co. Inc., 1968.
RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S/A, 1971.