ESTUDO DO MODELO DE JAYNES-CUMMINGS

José Carlos Libois Neto (PROVIC), Gustavo Mehanna Udhre, Fabiano Manoel de Andrade (Orientador), e-mail: fmandrade@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Física, Física Geral.

Palavras-chave: Cavidades, ótica, sistema de dois níveis, emaranhamento

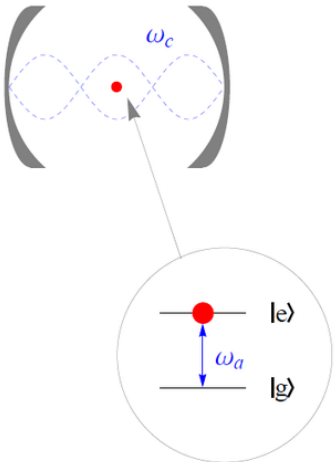
Resumo

Esse projeto teve como objetivo o estudo do modelo de Jaynes-Cummings, o qual descreve a interação de um átomo de dois níveis com uma cavidade ótica. Inicialmente estudamos a obtenção do Hamiltoniano do sistema de Jaynes-Cummings e, através da diagonalização desse Hamiltoniano, foram determinados os seus autovalores e autovetores de energia. A evolução temporal do sistema foi obtida através da solução de equação de Schrödinger dependente do tempo e verificamos o efeito de colapso e renascimento de probabilidades quando utilizamos os modos do campo preparados como um estado coerente.

Introdução

O modelo de Jaynes-Cummings (JC) [1] é constituído por um átomo de dois níveis (ou estados) de energia, o estado excitado ("*excited*") $|e\rangle$ e o estado fundamental ("*ground*") $|g\rangle$ acoplados a uma cavidade com paredes finas o suficiente para descartarmos a interação gravitacional entre os dois elementos, e irradiada por um campo eletromagnético com estados de energia dados por $|n\rangle$, onde n, é o número de fótons na cavidade. Ao iniciarmos a interação, nós teremos que o átomo sofrerá transições quânticas entre o estado fundamental e o excitado emitindo e absorvendo fótons do campo, alternando entre os estados de energia através das oscilações de Rabi. O sistema de JC está representado esquematicamente na Figura 1.

Figura 1– Esquema do modelo de JC. ω_c está associado a energia do campo e ω_a com a diferença de energia do átomo.



Fonte: MAX, Prince. **Jaynes-Cummings model.** Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jaynes-Cummings_model.png. Acessado em:01/10/2019.

Agora, para conseguirmos resolver o problema analiticamente, precisamos que átomo e o campo estejam em ressonância, isto é que a diferença de energia dos estados do átomo $\Delta = \hbar\omega_a$, ($\hbar \equiv h/2\pi$, onde h é constante de Planck) seja igual a energia de um

fóton do campo $\hbar\omega_c$. Essa condição faz com que a seguinte inequação seja verdadeira:

$$\omega_c + \omega_a \gg |\omega_c - \omega_a| = 0\,,$$

a qual causa a anulação dos termos contra girantes no hamiltoniano de interação, fazendo com que o sistema seja conservativo. A desigualdade acima é conhecida como "aproximação de onda girante" [1].

Material e Métodos

Este trabalho baseia-se em estudos teóricos em Ótica Quântica e Álgebra Linear. Logo como materiais, fizemos uso basicamente de livros sobre Álgebra Linear [2], Ótica Quântica [1] e Cálculo Diferencial e Integral [3]. Depois passou-se ao uso do software *Mathematica* para a confecção de gráficos.

Resultados e Discussão

O Hamiltoniano é um operador linear que define a energia de um sistema. Para definirmos o Hamiltoniano do modelo de JC, podemos dividi-lo em 3 partes [1]: o Hamiltoniano do átomo, o do campo e o de interação. O operador do átomo $\hat{H}_a$ é relacionado com a diferença de energia entre seus dois níveis, enquanto que o hamiltoniano do campo $\hat{H}_c$ é constituído pela energia de cada fóton na cavidade e a soma desses dois operadores será chamado de Hamiltoniano livre $\hat{H}_l$. Já o Hamiltoniano de interação $\hat{H}_i$ é definido pela dinâmica do sistema. Com o átomo no seu menor estado de energia $|g\rangle$, ele absorverá um fóton da cavidade, elevando seu estado para $|e\rangle$, e depois emitirá um fóton, retornando ao seu estado inicial. Com os três operadores definidos, podemos escrever o hamiltoniano total $\hat{H}_t$ como:

$$\hat{H}_t = \frac{\Delta}{2}\left(2\hat{N} + \hat{\sigma}_z + 1\right) + \hbar\Omega\left(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+\right),$$

onde a primeira parte do $\hat{H}_t$ é o Hamiltoniano livre $\hat{H}_l$ e a segunda é o Hamiltoniano de interação $\hat{H}_i$. Os operadores $\hat{\sigma}$ são, respectivamente, os operadores de spin ($\hat{\sigma}_z$), de levantamento ($\hat{\sigma}_+$) e de abaixamento ($\hat{\sigma}_-$), $\hat{N}$ é o operador número e os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$ são, respectivamente, os operadores de criação e destruição. O valor Ω é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo [4]

O espaço de Hilbert do átomo H_a é composto por dois vetores ortonormais:

$$H_a = \{|e\rangle, |g\rangle\}\,,$$

enquanto o campo tem n vetores ortonormais em sua base:

$$H_c = \{|n\rangle\}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Quando fazemos o acoplamento do átomo com o campo, devemos levar em conta o espaço composto, o qual é definido pelo *produto tensorial* entre eles:

$$H_t = H_a \otimes H_c = \{|e,n\rangle, |g,n\rangle\}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Por mais que eles sejam autoestados do $\hat{H}_l$ (átomo mais campo), eles não são degenerados, pois suas autoenergias são diferentes. Devido a ressonância no sistema, sabemos que os estados dos espaço H_a e H_c devem divergir em apenas um quantum de energia, isto é, se o átomo está no estado de maior energia $|e\rangle$ o campo deve estar em $|n\rangle$, e quando o átomo desce para $|g\rangle$, o campo deve subir para $|n+1\rangle$. O H_t deverá então ser definido por:

$$H_t = H_a \otimes H_c = \{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Os estados $|e,n\rangle = |e\rangle\otimes|n+1\rangle$ e $|g,n+1\rangle = |g\rangle\otimes|n+1\rangle$ são chamados de "estados produto", e eles são autoestados do $\hat{H}_l$. Quando não conseguimos escrever um estado como um produto tensorial entre os estados dos subsistemas, mas apenas com a superposição desses estados produto, dizemos que ele é emaranhado. Assim, o estado geral para o modelo de JC é escrito como

$$|\psi_{\pm}\rangle = \alpha|e,n\rangle \pm \beta|g,n+1\rangle ,$$

Onde α e β são amplitudes complexas e satisfazem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Devido ao emaranhamento, quando nós medimos uma parte do sistema, automaticamente temos a outra. Neste caso, quando determinamos qual o nível de energia do átomo também encontramos o número de fótons na cavidade.

Esses estados emaranhados são autoestados do $\hat{H}_i$. Como a combinação linear dos autoestados de um Hamiltoniano também é um autoestado desse operador, podemos deduzir que:

$$[\hat{H}_l, \hat{H}_i] = 0,$$

e já que o $\hat{H}_t$ e escrito como uma soma dos $\hat{H}_{int}$ e $\hat{H}_l$, deduzimos que:

$$[\hat{H}_t, \hat{H}_i] = 0.$$

Devido a isso, os estados emaranhados também são autoestados do $\hat{H}_t$.

Para determinarmos a evolução temporal do sistema de JC, utilizamos a equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar \frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi(t)\rangle.$$

Como os operadores $\hat{H}_i$ e $\hat{H}_t$ comutam, nós podemos optar pela representação de interação, a qual tem uma resolução mais simples:

$$i\hbar \frac{d\,|\psi(t)\rangle_I}{dt} = \hat{H}_i|\psi(t)\rangle_I,$$

onde $|\psi(t)\rangle_I$ representa o estado quântico na representação de interação. Definindo o estado inicial como $|\psi(0)\rangle_I = |e,n\rangle$, nós encontramos que a evolução temporal será dada por:

$$|\psi(t)\rangle_I = \cos(\Omega\sqrt{n+1}\,t)|e,n\rangle + i\,\mathrm{sin}(\Omega\sqrt{n+1}\,t)\,|g,n+1\rangle.$$

Na mecânica quântica, diferentemente da clássica, calculamos a probabilidade de certo evento acontecer. Para determinarmos qual a probabilidade de encontrarmos o átomo no estado de menor e maior energia, devemos calcular as seguintes probabilidades [4], respectivamente:

$$P_g(t) = |\langle e|\psi(t)\rangle_I|^2 = \cos^2(\Omega\sqrt{n+1}t),$$
$$P_e(t) = |\langle g|\psi(t)\rangle_I|^2 = \mathrm{sen}^2(\Omega\sqrt{n+1}t).$$

Dessas duas equações, nós vemos que a probabilidade de encontrarmos o sistema em certos estados e variável no tempo. Nós também podemos calcular o valor esperado do $\hat{H}_t$, o qual é dado por

$$\langle\hat{H}_t\rangle = {}_I\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle_I,$$

e fazendo os cálculos necessários, obtemos

$$\langle\hat{H}_t\rangle = \Delta(n+1)$$

É possível ver que a quantidade de energia no sistema é constante ao decorrer do tempo. Isto já era esperado, devido a natureza conservativa do sistema.

Para demonstrarmos o fenômeno de colapsos e renascimentos de probabilidades, devemos preparar nosso estado inicial como um estado coerente [4]:

$$|\psi(0)\rangle = |e,\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle).$$

Aplicando esse estado na equação de Schrödinger e escolhendo a representação de interação, encontramos que a evolução temporal desse sistema será dada por:

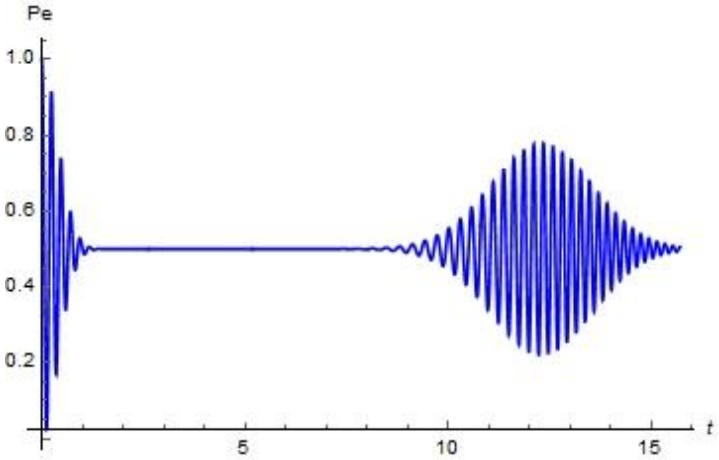
$$|\psi(t)\rangle_I = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} [\cos(\Omega\sqrt{n+1}\,t)|e,n\rangle + i\,\mathrm{sin}\left(\Omega\sqrt{n+1}\,t\right)|g,n+1\rangle].$$

Portanto, a probabilidade de encontrarmos o sistema no estado excitado $|e\rangle$ será:

$$P_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle n\rangle} \frac{\langle n\rangle^n}{n!} \cos^2\left(\Omega\sqrt{n+1}t\right),$$

onde $\langle n\rangle = |\alpha|^2$ é o número médio de fótons na cavidade. O gráfico de $P_e(t)$ está mostrado na Figura 2.

Figura 2 – Gráfico da probabilidade $P_e(t)$ como a função do tempo para $\langle n\rangle = 25$ e $\Omega = 2.6$. Notamos o desaparecimento das oscilações para tempos curtos seguido por um renascimento das oscilações para tempos longos.



Fonte: O autor.

Conclusão

O estudo sobre o modelo de JC proporcionou um estudo geral sobre a mecânica quântica. Na parte matemática, estudamos álgebra linear para resolvermos os hamiltonianos e depois cálculo para determinar a evolução temporal do sistema. Vimos ainda séries para determinar os coeficientes dos estados num estado coerente, e também utilizamos técnicas computacionais para a geração de gráficos. A sessão sobre observáveis foi a mais interessante no sentido físico, pois nela demonstramos que o fato da ressonância realmente produz um sistema conservativo, e também vimos a natureza probabilística da mecânica quântica, onde encontramos funções dependentes do tempo que nos davam as chances de certo evento acontecer.

Agradecimentos

Agradeço ao meu amigo e coorientador Gustavo Udhre, meu orientador Prof.º Dr. Fabiano M. Andrade e ao grupo FQIQ pelo apoio e as discussões. Agradeço também ao CNPq e a Fundação Araucária.

Referências

[1] Orszag, M. **Quantum Optics: Including Noise Reduction, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence**. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Boldrini, J. L. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra, 1984.

[3] Flemming, D. M. **Cálculo A: funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Prentice Hall Brasil, 2007

[4] Sakurai, J. J.; Napolitano, J., et al. **Modern quantum mechanics**. In (Vol. 185), Pearson Harlow, 2014.