TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS COM INTRODUÇÃO À COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Fernanda Caroline Cordeiro (PROVIC) Orientador: Marcos Teixeira Alves e-mail: feer_cordeirooo@yahoo.com.br e-mail do orientador: mtalves@uepg.br

Universidade Estadual de Ponta Grossa
Departamento de Matemática e Estatística

Matemática, Análise

Palavras-chave: matrizes, transformações, quatérnios.

Resumo
Neste trabalho, apresentamos as transformações geométricas no plano e no espaço. A cada transformação associamos uma matriz e discutimos as principais propriedades com base na Álgebra Linear. A estrutura dos quartérnios será investigada como uma possibilidade de estabelecermos rotações de vetores e composição de rotações no espaço.

Introdução

As transformações geométricas possuem diversas aplicações na área da computação gráfica, pois permitem alterar, modelar e manipular objetos que estão contidos dentro de uma determinada cena. Uma cena, por mais complexa que pareça, pode ser reduzida a uma mais simples, bastando observar que cada componente da cena pode ser vista com um conjunto de subcomponentes: algumas podem ser reduzidas a formas geométricas mais simples como triângulos, retângulos, entre outras, ou objetos geométricos mais usuais como cubos, esferas, cones, etc. Pretendemos mostrar que as noções de matrizes e transformações são fundamentais neste processo. Esta pesquisa está baseada no estudo das transformações geométricas no plano e no espaço, na caracterização do conjunto dos quatérnios e na representação e visualização de objetos gráficos planares e espaciais no contexto da computação gráfica.

Material e Métodos

Utilizaram-se livros de álgebra linear e artigos relacionados com a temática da pesquisa. Foram realizados seminários semanais, onde os conteúdos eram apresentados e discutidos sob orientação do profº Marcos Teixeira Alves (DEMAT – UEPG).

Resultados e Discussão

Transformação linear é qualquer função entre dois espaços vetoriais que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar. Para cada vetor $p \in \mathbb{R}$, toda transformação linear $T(p)$ pode ser dada por Mp, onde M é uma matriz $m\,x\,n$, chamada matriz de transformação linear. A seguir, temos alguns casos de transformações lineares, assim como suas matrizes de transformação.

- **Transformação Linear de Dilatação ou Contração no Plano**

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Transformação de Espelhamento ou Reflexão no Plano**

Seja: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}.$$

Note que a matriz de transformação de espelhamento em relação a reta $y = -x$ é dada por:

$$M = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

- **Transformação de Cisalhamento no Plano**

Uma transformação de cisalhamento em relação ao eixo x é uma aplicação: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x + ytg\gamma\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & tg\gamma\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

onde γ é o ângulo de deslocamento em relação ao eixo y.

- **Transformação de Translação no Plano**

A transformação de Translação, não é linear, pois consiste em adicionar um vetor t não nulo ao vetor $p = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

- **Transformação de Rotação no Plano**

Escrevendo o vetor p em função de cos e sen:

$$p = \begin{pmatrix}r\cos\alpha\\ r\,sen\,\alpha\end{pmatrix}$$

Ou seja, a matriz de Rotação de um ângulo θ em torno da origem é

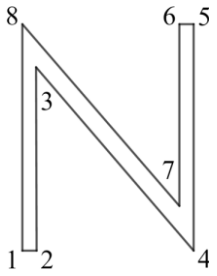
$$M = \begin{pmatrix}x\cos\theta - y\,sen\,\theta\\ x\,sen\,\theta + y\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Aplicação à Computação Gráfica

Computação gráfica é a área que trata de imagens apresentadas ou animadas em uma tela de computador. As aplicações da computação gráfica são as mais variadas e continuam crescendo rapidamente. Um exemplo elementar é apresentado: a letra maiúscula N na figura abaixo, fica determinada por oito pontos, ou vértices.

Figura 1: N regular.

ISSN 1676-0093



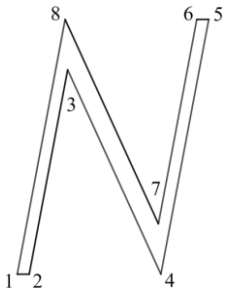
As coordenadas de seus pontos são representadas pela matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 0{,}5 & 6 & 6 & 5{,}5 & 5{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}42 & 0 & 8 & 8 & 1{,}58 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dadas $S = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vamos realizar uma transformação de cisalhamento $x \to Ax$ sobre N, seguida de uma mudança de escala nas coordenadas de x para diminuir sua largura, através da multiplicação das matrizes, que terá como resultado

$$SAD = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}375 & 1{,}57875 & 4{,}5 & 6 & 5{,}625 & 4{,}42125 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 6{,}420 & 0 & 8 & 8 & 1{,}580 & 8 \end{pmatrix}.$$

Figura 2: Transformação composta de N(letra N em itálico):



Quatérnios

O conjunto dos Quatérnios, representado por $\mathbb{H}$, nada mais é que uma forma algébrica para representar as rotações no espaço. A partir da extensão dos números complexos o matemático William Hamilton inventou os quatérnios.

O produto de dois complexos produz uma rotação e uma mudança de escala no plano. Então, Hamilton teve a ideia de que seriam necessários quatro números para escrever uma rotação no espaço seguida de um aumento de escala.

Um número representaria a mudança de escala, outro o grau a ser rotacionado e os outros dois o plano em que o vetor deve ser girado:

$$\underline{q} = s + xi + yj + zk,$$

onde

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i \text{ e } ki = -ik = j.$$

Hamilton batizou seus números complexos de quatérnios. Um quatérnio $s + xi + yj + zk \rightarrow [s, v]$, $s \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$, onde s é a parte escalar e $v = (x, y, z)$, a parte vetorial.

Quatérnios e rotações

Consideremos uma rotação de um ângulo α em torno de um eixo $\hat{e}$

$$\underline{\hat{q}} = \left[cos\left(\frac{\theta}{2}\right), sen\left(\frac{\theta}{2}\right)(1,0,0)\right], \quad \underline{\hat{q}^{-1}} = \left[cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -sen\left(\frac{\theta}{2}\right)(1,0,0)\right]$$

e, seja $p \in \mathbb{R}^3$

$$p = [0, p].$$

Realizamos a multiplicação a seguir:

$$\underline{\hat{q}}p\underline{\hat{q}}^{-1} = (cos\theta)p + (1 - cos\theta)\big((1,0,0).p\big)(1,0,0) + (sen\theta)\big((1,0,0)x\ p\big).$$

Concluímos então, que o seguinte quatérnio é responsável pela rotação nula.

$$\underline{\hat{q}} = [1, 0\hat{e}] = [1,0] = [1, (0,0,0)] = 1 + 0i + 0j + 0k \equiv 1 \in \mathbb{R}$$

Conclusões

Este trabalho trata dos resultados de um projeto de iniciação científica iniciado em agosto de 2018 e finalizado em julho de 2019. Foram estabelecidos resultados à transformações geométricas no plano e no espaço e uma introdução à computação gráfica. Para este estudo, houve a preocupação de que pré-requisitos fossem discutidos antecipadamente de forma detalhada, evitando grandes dificuldades no desenvolvimento dos resultados, como por exemplo: matrizes e transformações lineares e o conjunto dos quatérnios.

Agradecimentos

Agradeço à Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela oportunidade de estar participando do Projeto Voluntário de Iniciação Científica - PROVIC, tendo como orientador o professor Marcos Teixeira Alves.

Referências

AZEVEDO, E., CONCI, A. **Computação Gráfica: teoria e prática.** Rio de Janeiro: Campus, 2003.

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. FIGUEIREDO, V. L., WETZLER, H. G. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harper-Row, 1980.

GOMES, J., VELHO, L. **Fundamentos da Computação Gráfica.** Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

LEON, S.J. **Álgebra Linear com Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LIMA, El. L. **Álgebra Linear.** Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

ISSN 1676-0093