CURVAS DO TIPO TEMPO FECHADAS EM RELATIVIDADE GERAL: O PROBLEMA DA VIAGEM NO TEMPO E IMPLICAÇÕES PARA A MECÂNICA QUÂNTICA

Enrique Chipicoski Gabrick (PIBIC//FA), José Tadeu Teles Lunardi (Orientador): jttlunardi@gmail.com.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Física: Física Geral (Relatividade e Gravitação).

Palavras-chave: Relatividade Geral. Cosmologia. Solução de Gödel. Curvas do tipo tempo fechadas (CTC).

Resumo

Neste trabalho discutimos a obtenção da solução de Gödel para as equações de campo da Teoria da Relatividade Geral (TRG). Essa solução foi proposta em 1949 por Kurt Gödel e é uma solução exata das equações da TRG. Através dela, construímos um modelo cosmológico que descreve um fluido sem pressão, com vorticidade não nula e que possui uma propriedade muito curiosa, que são as curvas do tipo tempo fechadas (CTC's); nessas curvas, que não são geodésicas, um observador real pode influenciar o seu passado. Pela existência das CTC's conseguimos compreender que o espaço-tempo nessa geometria não pode ser dividido em uma dimensão global de tempo e três espaciais, a divisão conhecida como 3+1.

Introdução

Em 1915 surge a Teoria da Relatividade Geral, que busca generalizar o princípio da invariância das leis físicas para referenciais não inerciais, isto é, para aqueles referenciais que possuem aceleração não nula. Podemos destacar dois grandes princípios que nos permitem entender a TRG: o primeiro deles é o Princípio da Equivalência, o qual diz que é impossível para um observador distinguir o efeito de aceleração do efeito de gravitação, o qual conecta a não-inercialidade à gravitação; o segundo princípio associa o efeito gravitacional à geometria do espaço-tempo, ou seja, estabelece que os efeitos gravitacionais são oriundos da curvatura do espaço-tempo. Dada a distribuição de matéria e energia do universo, esta determinará a curvatura do espaço-tempo, de maneira que as partículas (massa ou energia, tal como o fóton) seguem trajetórias geodésicas – uma geodésica é a distância mais curta entre dois pontos. A distribuição de massa e energia para um fluido de densidade ρ e pressão p é dada pelo seguinte tensor energia-momento (STEPHANI, 1993)

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)v_{\mu}v_{\nu}-pg_{\mu\nu}$$

onde v_{μ} é o campo de velocidade do fluido e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

Escrevemos as equações de campo da TRG como

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=-\kappa T_{\mu\nu} \quad (1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura contraído, com escalar $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $\kappa=G/c^4$, G é a constante de gravitação universal newtoniana, c é a velocidade da luz no vácuo e Λ é a constante cosmológica.

Neste trabalho vamos mostrar como obter a solução apresentada por Kurt Gödel em 1949, que consiste em uma solução para a equação (1) no caso em que o tensor energia-momento corresponde a um fluido com pressão nula, e cujo estado de movimento apresenta rotação não nula. Mostraremos como obter, a partir desse modelo, as curvas fechadas do tipo tempo (CTC's), ao longo das quais um observador real poderia, em princípio, influenciar o seu passado (GÖDEL, 1949; HAWKING e ELLIS, 1974; NOVELLO et al, 2010; NOVELLO, 2010). Uma excelente representação desse modelo cosmológico a seguinte:

Material e Métodos

A solução de Gödel pode ser discutida em dois sistemas de coordenadas: em um sistema *(t, x, y, z)* e em um sistema cilíndrico, no qual algumas de suas características ficam mais evidentes. A métrica em um sistema *(t, x, y, z)* é da seguinte forma (NOVELLO et al, 2010; NOVELLO, 2010)

$$ds^2 = dt^2 + 2e^{cx}\,dydt + \frac{1}{2}e^{2cx}dy^2 - dx^2 - dz^2 \quad (2)$$

Nós podemos escolher um sistema de tetradas para representar a métrica em uma forma Minkowskiana, da seguinte forma

$$ds^2 = \theta^A\theta^B\eta_{AB} = (\theta^0)^2 - (\theta^1)^2 - (\theta^2)^2 - (\theta^3)^2$$

da qual obtemos que as componentes não nulas das tetradas $e_\alpha^A(x)$ são

$$e_0^0 = 1\ ,\ e_2^0 = e^{cx}\ ,\ e_1^1 = 1\ ,\ e_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{cx}\ ,\ e_3^3 = 1$$

com inversas

$$e_0^0 = 1\quad ,\quad e_2^0 = -\sqrt{2}\quad ,\quad e_1^1 = 1\quad ,\quad e_2^2 = \sqrt{2}e^{-cx}\quad ,\quad e_3^3 = 1$$

e concluímos que a componente não nula do tensor de curvatura na base das tetradas vale $R_{00} = -c^2$.

No modelo discutido por Gödel, a fonte de curvatura é um fluido sem pressão, o qual podemos escrever na base das tetradas como (assumindo uma velocidade no sistema inercial local $v_A = \delta_A^0$)

$$T_{AB} = \rho\delta_A^0\,\delta_B^0$$

Reescrevemos as equações de campo de Einstein (1) de uma forma equivalente na base das tetradas como

$$R_{AB} = -\kappa T_{AB} + \frac{\kappa}{2}T\eta_{AB} + \Lambda\eta_{AB}$$

onde η_{AB} é o tensor métrico do espaço de Minkowski. Calculamos as componentes (0-0) e (1-1)[1], obtendo para a componente (0-0) o valor $c^2 = \frac{\kappa\rho}{2} - \Lambda$ e para a componente (1-1) o valor $0 = -\kappa\rho - 2\Lambda$. Desses resultados, temos que

$$\kappa\rho = -2\Lambda = c^2 \text{ (a)}$$

A única quantidade cinemática (expansão, cisalhamento e vorticidade), que resulta ser não nula e que caracteriza o observador é a vorticidade, cujo vetor assume a forma

$$\omega^A = (0,0,0,\omega_{12}) = \left(0,0,0,-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

com a norma $\Omega^2 = -\omega^A\omega_A = \frac{c^2}{2}$. Através desse valor obtemos a seguinte relação

1 As componentes (2-2) e (3-3) são iguais a componente (1-1).

$$\kappa\rho = 2\Omega^2 \quad \text{(b)}$$

Discutindo a solução em um sistema de coordenadas cilíndrico *(t, r, Φ, z)*, o elemento de linha assume a forma

$$ds^2 = a^2\left[dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r)\,d\phi^2 + 2\,h(r)\,d\phi\,dt\right] \quad (3)$$

onde *a* é uma constante. Escolhendo um sistema inercial local de tetradas, com componentes

$$e_0^0 = a \quad , \quad e_2^0 = ah \quad , \quad e_1^1 = a \quad , \quad e_2^2 = a\Delta \quad , \quad e_3^3 = a$$

onde definimos $\Delta \equiv \sqrt{h^2 - g}$, e as inversas

$$e_0^0 = \frac{1}{a} \quad , \quad e_2^0 = \frac{-h}{\Delta}\frac{1}{a} \quad , \quad e_1^1 = \frac{1}{a} \quad , \quad e_2^2 = \frac{1}{a}\frac{1}{\Delta} \quad , \quad e_3^3 = \frac{1}{a}$$

calculando as componentes do tensor de curvatura contraídas, na base das tetradas, obtemos

$$R_{00} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{h'}{\Delta}\right]^2$$

$$R_{11} = R_{22} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2}\frac{h'^2}{\Delta^2}\right]$$

$$R_{02} = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{-h''}{\Delta} + \frac{h'\Delta'}{\Delta^2}\right]$$

Fazendo $R_{02} = 0$, devido a inexistência de fluxo de energia, temos

$$h'/\Delta = constante$$

Substituindo esse resultado nas equações de campo, em um procedimento similar ao anterior, calculando as componentes (0-0), (1-1), (2-2) e (3-3), e levando em consideração que esta última é nula, obtemos

$$\kappa\rho = -2\Lambda$$

e

$$\frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{1}{2}\left[\frac{h'}{\Delta}\right]^2 = 0$$

A solução dessa equação diferencial, encontrada por Gödel, é

$$h = \sqrt{2}\,senh^2 r$$

$$\Delta = senhr\cosh r$$

para discutir a propriedade das curvas fechadas do tipo tempo fazemos

$$g = h^2 - \Delta^2 = senh^4 r - senh^2 r \quad \text{(c)}$$

Resultados e Discussão

Através do resultado obtido na equação *(a)* vemos que a positividade da energia é assegurada para $\Lambda < 0$. Da equação *(b)* concluímos que a distribuição de energia no espaço-tempo mede a intensidade da sua vorticidade.

Definimos o raio crítico R_c de maneira que $senhR_c = 1$. Para valores de r_1 tais que $0 < r_1 < R_c$ temos que $g < 0$, para $r_2 > R_c$ temos $g > 0$ e para $r_3 = R_c$ temos $g = 0$. O círculo nulo (*g = 0*) definido por *z = const.*, *t = const.*, *r = const.* separa o espaço tempo em duas regiões, as quais chamaremos de causal (C) e acausal (A), Colocando essas condições na métrica (3)

$$ds^2 = a^2\,g(r)\,d\phi^2$$

e considerando os sinais de *g* podemos determinar que tipos de intervalos temos nas diferentes regiões. Na região interna ao raio crítico, a região C, temos curvas fechadas do tipo espaço, uma vez que o elemento $ds^2 < 0$. E na região A temos curvas fechadas do tipo tempo, essas curvas surgem para valores maiores que o raio crítico, de modo que o elemento de linha é positivo $ds^2 > 0$, indicando que o

intervalo é do tipo tempo e fechado. Essas curvas mostram que um observador real poderia viajar ao seu passado, estando ao longo dessa linha-mundo. A questão da violação da causalidade não ocorre globalmente, mas apenas se o observador vai além do raio crítico.

Conclusões

Embora o modelo de Gödel não apresente evidências experimentais, é importante estudá-lo para ganhar um entendimento melhor do conceito de tempo em TRG; a existência das CTC's indica que não é possível dividir o espaço-tempo em uma dimensão global de tempo e três espaciais, a divisão conhecida como 3+1.

Agradecimentos

À Fundação Araucária pelo financiamento. Ao Prof. José Tadeu Teles Lunardi pela orientação.

Referências

GÖDEL, K. An example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. **Reviews of modern physics,** v. 21, n. 3, jul. 1949.

NOVELLO, M. **Cosmologia**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. (Coleção Tópicos em Física, n. 4)

NOVELLO, M.; PINTO-NETO, N.; BERGLIAFFA, P. E. S. (org.). **Programa Mínimo de Cosmologia,** Rio de Janeiro: Jauá Editora, 2010.

STEPHANI, H. **General Relativity**: An introduction to the theory of the gravitational field. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. **The large scale structure of space-time**. Cambridge: Cambridge University Press, 1974.