Weierstrass e a Aproximação de funções contínuas

Christian Junior Mainardes, Marciano Pereira (Orientador), e-mail: marciano@uepg.br.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise.

Palavras-chave : Weierstrass, aproximação de funções, polinômios.

Resumo

Os polinômios são funções bastante simples e formam uma classe bem comportada dentre as funções contínuas. Entretanto, o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo não é constituído apenas por polinômios. Este projeto teve como objetivo demonstrar o teorema da aproximação de Weierstrass, que garante que toda função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios. Foram estudadas três diferentes demonstrações desse teorema, uma utilizando os polinômios de Bernstein, outra usando funções poligonais e a última via convoluções (ou média ponderada).

Introdução

O teorema da Aproximação de Weierstrass foi demonstrado inicialmente por Karl Weierstrass, em 1885, e ao longo do tempo foram surgindo várias outras demonstrações para esse teorema, usando métodos diferentes.

A prova feita por Henri Lebesgue em 1897 é uma das mais citadas na literatura, ela se baseia em que toda função contínua em um intervalo compacto pode ser uniformemente aproximada por poligonais, e estas poligonais são limite uniforme de polinômios.

A demonstração do teorema da aproximação de Weierstrass feita por E. Landau utiliza a técnica de regularizar uma função tomando a média ponderada dos valores que ela assume na vizinhança dos pontos de seu domínio, essa média ponderada é o que chamamos de convolução de uma função com um núcleo conveniente.

Outra prova que também foi estudada é a que utiliza os chamados polinômios de Bernstein.

Material e Métodos

Os materiais utilizados foram livros, artigos e dissertações. Os métodos e técnicas usados foram basicamente os da Análise Real.

Resultados e Discussão

Teorema da Aproximação de Weierstrass: Toda função $f \in C[a,b]$ pode ser aproximada uniformemente por polinômios de $P[a,b]$. Em outras palavras, dados uma função f contínua em $[a,b]$ e $\varepsilon > 0$, existe uma sequência de polinômios p_n tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |f(x) - p_n(x)| < \varepsilon, \forall\, x \in [a,b].$$

Roteiro para prova segundo Lebesgue:

Toda função contínua num compacto pode ser uniformemente aproximada por poligonais;

Toda função poligonal é combinação linear de funções do tipo $|x-a|$; a função valor absoluto é limite uniforme de polinômios. Seguimos então com as seguintes afirmações (que não provaremos no momento);

***Lema 1**:* Em qualquer intervalo compacto $[a,b]$, a função $f(x)=|x|$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

A função $f(x)=|x|$ é chamada função poligonal não linear. Daí,

***Lema 2**:* Toda função poligonal $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

O teorema se completa com o seguinte lema,

Lema 3: Toda função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pode ser uniformemente aproximada por funções poligonais.

Roteiro Para a demonstração segundo Landau:

Seja φ real contínua e positiva que se anula fora do intervalo $[-\delta,\delta]$. Dada uma função contínua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a convolução de f com φ, definida para todo $x\in\mathbb{R}$ pela expressão

$$(f*\varphi)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\varphi(t)dt=\int_{-\delta}^{+\delta}f(x+t)\varphi(t)dt.$$

A prova segue dos seguintes *lemas:*

***Lema 4**:* se $0<\delta<1$ então $lim_{n\to\infty}\varphi(x)=0$ uniformemente para $|x|\geq\delta$.

***Lema 5**:* Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua, com $f(0)=f(1)=0$. Considere f definida (e contínua) em toda reta real pondo $f(x)=0$ se $x\notin[0,1]$. Para todo $x\in[0,1]$ e todo $n\in\mathbb{N}$, escreva

$$p_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\varphi(t)dt.$$

Então $p_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, assim definida, é (a restrição de) um polinômio.

Lema 6: Nas condições do lema anterior, tem-se $lim_{n\to\infty}p_n=f$ uniformemente no intervalo [0, 1].

Os lemas anteriores mostram que toda função contínua $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=f(1)=0$ é limite uniforme de uma sequência de polinômios.

A demonstração com polinômios de Bernstein:

Definição: Seja $f\in C[0,1]$. Então para cada natural $n\geq1$ o polinômio de Bernstein de ordem n associado a f é dado por

$$B_{n,f}(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

onde $x\in[0,1]$.

Necessitamos de duas funções específicas, que obedecem ao seguinte lema:

***Lema 7*:** Sejam $f_1,f_2:[0,1]\to\mathbb{R}$ as funções dadas por $f_1(x)=x$ e $f_2(x)=x^2$. Então, para todo natural $n\geq1$, tem-se:

$B_{n,f_1}(x)=x$ e $B_{n,f_2}(x)=\frac{(n-1)x^2}{n}+\frac{x}{n}$.

Consideremos a função $f\in C[0,1]$. Provaremos que a sequência $(B_{n,f})\in P[0,1]$ dos polinômios de Bernstein associada a f, converge uniformemente para f. Asimm

$$n>n_0\Rightarrow\left|f(x)-B_{n,f}(x)\right|<\varepsilon\ \forall x\in[0,1]\qquad(1)$$

Assim, seja $\varepsilon>0$. Como o intervalo $[0,1]$ é um subconjunto compacto $\mathbb{R}$ e f é contínua então valem as seguintes afirmações:

I. f é uniformemente contínua, ou seja, para $\varepsilon>0$ dado acima, existe $\delta>0$ tal que

$\forall x,\frac{k}{n}\in[0,1];\ \left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta\ \Rightarrow\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

II. $f([0,1])$ é um conjunto compacto, portanto, a função f é limitada, ou seja, existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [0,1]$. Sendo assim, escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ que satisfaz $n_0 > \frac{M}{\varepsilon\delta^2}$.

Vamos mostrar que esse valor de n_0 satisfaz a condição (1). Fazendo $y = 1 - x$ no desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Assim, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ e utilizando a igualdade acima, segue que

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] \right|.$$

Por outro lado, para cada $x \in [0,1]$, define-se os seguintes conjuntos:
$I(x) = \left\{ k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k \leq n \ e \ \left| x - \frac{k}{n} \right| < \delta \right\}$ e $J(x) = \left\{ k \in \mathbb{N};\ 1 \leq k \leq n \ e \ \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\}$.
Daí,

$$|B_{n,f}(x) - f(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right] \right|$$

$$\leq \sum_{k \in I(x)}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k \in J(x)}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|$$

$$< \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k \in J(x)}^{n} \left| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| (M+M)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{k \in J(x)}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

onde as desigualdades acima seguem da desigualdade triangular e das condições em (I) e (II).
Analisemos agora a última igualdade. Observemos que

$$k \in J(x) \Rightarrow \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} \geq 1.$$

Portanto,

$$\sum_{k \in J(x)}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in J(x)}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\delta^2} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{\delta^2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(x^2 - \frac{2xk}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) x^k (1-x)^{n-k} \right)$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \left(x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \right).$$

Assim,

$$\sum_{k\in J(x)}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\delta^2}\left(x^2-2x^2+\frac{(n-1)x^2}{n}+\frac{x}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n\delta^2}(nx^2-2nx^2+nx^2-x^2+x)=\frac{(x-x^2)}{n\delta^2}\leq\frac{1}{4n\delta^2},$$

pois $x-x^2\leq\frac{1}{4}$, para todo $x\in[0,1]$.

Das informações acima, temos que, para todo $x\in[0,1]$, se $n\geq n_0$, implica que

$$\left|B_{n,f}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+2M\sum_{k\in J(x)}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{4n\delta^2}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{M\varepsilon\delta^2}{2M\delta^2}=\varepsilon,$$

e o teorema fica provado para todo $x\in[0,1]$.

Usando uma função auxiliar pode-se mostrar a validade do teorema em um intervalo [a, b] genérico.

Conclusão/ões

Com o projeto obteve-se grandes conquistas, como aumento do conhecimento matemático, melhora na exposição de ideias e desempenho no curso. Em relação ao tema da pesquisa, percebemos o quão importante é o Teorema da Aproximação de Weierstrass, pois este historicamente foi provado de diversas formas, por vários matemáticos importantes, o qual teve generalizações e várias aplicações.

Agradecimentos

A Fundação Araucária pela bolsa, pois sem ela, não teria tido a possibilidade de aumentar meu conhecimento matemático a esse nível.
Ao meu orientador Marciano Pereira que sempre me incentivou a buscar mais e nunca deixou de acreditar no meu potencial.

Referências

[1] AMORIM, V. G. **Aproximação de Funções Contínuas por Polinômios**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

[2] CAROTHERS, N. L. **Real Analysis**. London: Cambridge University Press, 2000.
[3] KULLER, R. G. Coin Tossing, Probability, and the Weierstrass Approximation Theorem. **Mathematics Magazine**, v. 37, n. 4, p. 262-265, 1964.
[4] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
[5] LOPES, W. A. **O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações**. 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009.