APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES CONTÍNUAS POR POLINÔMIOS TRIGONOMÉTRICOS

Bruno Henrique Kinkoski Manisco (PIBIC/UEPG), Wanderley Aparecido Cerniauskas, e-mail: cerniaukas@gmail.com.

Universidade Estadual de Ponta Grossa/Departamento de Matemática e Estatística.

Matemática, Análise, Equações Diferenciais Parciais.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas, Séries Convergentes, Solução de Equações Diferenciais.

Resumo

A pesquisa apresentou como ponto basilar o estudo de conceitos básicos da Trigonometria, fundamentais para que se entendam as Funções Trigonométricas e também suas propriedades, como por exemplo, sua Periodicidade. Foram estudadas técnicas que permitem determinar os coeficientes do Polinômio Trigonométrico, o qual é uma aproximação para uma dada Função Contínua, com o objetivo de explorar o Método de Expansão em Séries de Fourier utilizado para resolver Equações Diferenciais Parciais.

Introdução

O trabalho inicia-se através do estudo de Funções Trigonométricas, analisando características relacionadas a sua Periodicidade. Tal caminho é fundamental, uma vez que é a base do estudo das Séries de Fourier, que possibilita representar uma dada Função, periódica e seccionalmente contínua, por meio de uma série de senos e cossenos. Este conjunto de resultados é garantido pelo Teorema de Dirichlet, que estabelece as condições para que exista a convergência da Série de Fourier.

Via de regra, representamos uma Série de Fourier pela expressão:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right)$$

O estudo desenvolvido relaciona-se com o campo das Equações Diferenciais. Abordamos alguns métodos para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, tal como das Equações Separáveis, Exatas e Lineares Homogêneas. Em seguida, abordamos as Equações Diferenciais Parciais, que em suma, são resolvidas através do Método de Separação de Variáveis, que possibilita reduzi-la a duas ou mais Equações Diferenciais Ordinárias, e o Método de Expansão em Séries de Fourier.

ISSN 1676-0093

O problema modelo avaliado é o da Equação da Onda, expressa por uma Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda Ordem. A equação é:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{1}$$

Material e Métodos

Foram utilizados meios materiais como livros e softwares matemáticos, Geogebra e Máxima. O método se baseou no estudo teórico do conteúdo, apresentação de seminários e encontros periódicos para discussão de dúvidas.

Resultados e Discussão

Durante a coleta de dados e análise gráfica, pode-se observar as variações que ocorriam, conforme mudávamos alguns aspectos das Funções, fixado o domínio, como por exemplo a Dilatação e Compressão do período e Translação do gráfico. Essas alterações foram importantes quando estávamos buscando por aproximações, e essas aproximações estavam relacionadas ao estudo das Séries de Fourier.

Os resultados obtidos, relacionando Séries Convergentes e Equações Diferenciais possibilita o avanço dos estudos nessa área, uma vez que foi possível definir quais melhores métodos se aplicam.

O exemplo que será abordado e que se adequa à pesquisa é o estudo da equação (1).

Inicialmente supomos uma corda de comprimento L com extremidades fixas em suportes com mesmo nível horizontal. Denotamos $u(x,t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto $0 \leq x \leq L$, no instante $t \geq 0$; assumimos $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ a Equação Diferencial Parcial da Onda, com a definindo a velocidade de propagação da onda.

Em seguida, definimos as Condições Iniciais e de Contorno, as quais estão envolvidas no sistema avaliado. Levando em conta que as extremidades da corda estão fixas, então $u(0,t) = 0$ e $u(L,t) = 0$. Note que relativo à posição inicial teremos $u(x,0) = f(x)$, e com respeito à velocidade inicial teremos $u_t(x,0) = g(x)$.

Assumimos então que no problema, estamos considerando $x \in \Re_+$, tal que $0 \leq x \leq L$, onde L determina o comprimento da corda, consideramos $t \in \Re_+$ e assumimos também que a velocidade inicial é nula, ou seja, $g(x) = 0$. Então, basicamente o problema avaliado será:

ISSN 1676-0093

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant L, . \end{cases}$$

onde $f(0) = f(L) = 0$ define o estado inicial da corda.

Resolveremos o problema através do Método de Separação de Variáveis aplicado em $u(x,t)$, supondo que possa ser escrito como $X(x)T(t)$. Em suma, iremos derivar de modo parcial u com relação à x e com relação à t, com o objetivo principal de substituirmos em (1) os elementos encontrados com a derivação. Após as substituições, encontramos como resultante duas Equações Diferenciais Ordinárias, tais como $X'' + \lambda X = 0$ e $T'' + a^2 \lambda T = 0$. Basta então resolvermos estas equações, aplicando as condições de Contorno e os conceitos acerca da Expansão em Séries de Fourier para encontrarmos a solução, que por fim é dada na forma:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m sen(\tfrac{m\pi x}{L}) cos(\tfrac{m\pi at}{L}) \text{, com } c_m = \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x) sen(\tfrac{m\pi x}{L}) dx, \; m = 1, 2....$$

Conclusão/ões

Conclui-se com a pesquisa que, realizando um estudo preliminar, abrangendo conceitos iniciais de Trigonometria, Periodicidade de Funções, análise gráfica e também os métodos relacionados à Séries de Fourier, pode-se compreender e solucionar problemas da esfera das Equações Diferenciais, usando métodos práticos e que não exigem extrema sofisticação teórica.

Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) pela oportunidade e por viabilizar os meios necessários à realização da pesquisa, agradeço igualmente meu Orientador Wanderley Aparecido Cerniauskas pelo contínuo apoio e prontidão em sanar todas as dúvidas surgidas durante a jornada científica.

Referências

BOYCE, Willian E.; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Nona Edição. LTC - Livros Tecnicos e Cientificos Editora Ltda. S.A. Rio de Janeiro, RJ, 2010.

CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. Trigonometria. Números Complexos. Coleção Professor de Matemática, SBM,1992.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar. 3ª ed. São Paulo, Atual, 2009.

IOCHUCKI, Suellen Karina Palhano. Proposta para o Ensino da Trigonometria: Introdução à Aproximação de Funções Periódicas por Polinômios Trigonométricos. Dissertação (PROFMAT), http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/1512. Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2016.

ISSN 1676-0093